目　录

导读

九章筭术

导　读

《九章算术》是中国古代最重要的数学经典，历来被尊为算经之首。传本《九章算术》含有西汉《九章算术》本文、三国魏刘徽《九章算术注》和唐李淳风等《九章算术注释》三种内容。所谓《九章算术》有狭义和广义两种含义。狭义地说，仅指西汉张苍（？—前 152）、耿寿昌（前 1 世纪）等编纂的《九章算术》本文。广义地说，还包括刘徽的《九章算术注》与李淳风等的《九章算术注释》。一般说来，言《九章算术》的编纂、特点等，常用狭义的含义，言《九章算术》的版本、校勘等，则常用广义的含义，而言成就及在中国数学史、世界数学史上的影响则兼而有之。

一、《九章算术》

（一）《九章算术》和《算经十书》

《九章算术》是《算经十书》之一。《算经十书》是汉至唐初数学著

作的总集。唐初李淳风（602—670）等整理《周髀算经》《九章算术》等十部算经，作为算学馆的教材和明算科的考试科目。北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻十部算经，时《夏侯阳算经》《缀术》已亡佚，前者以唐中叶一部实用算术书充任，后者则付之阙如。秘书省刻本今皆不存。南宋庆元六年（1200）至嘉定六年（1213）天算学家鲍澣之翻刻了北宋秘书省刻本，同时还刊刻了《数术记遗》，世称南宋本。到清初南宋本仅存《周髀算经》《九章算术》（半部）、《孙子算经》《张丘建算经》《五曹算经》《缉古算经》《数术记遗》和《夏侯阳算经》等七部半。康熙二十三年（1684）汲古阁主人毛扆影钞之，世称汲古阁本。该本后来流入清宫，藏于天禄琳琅阁。1932 年，北平故宫博物院影印，收入《天禄琳琅丛书》，原本现藏于台北故宫博物院。清中叶南宋本《缉古算经》和《夏侯阳算经》不知流落何处。1980 年，北京文物出版社影印了尚存的南宋本算经，称为《宋刻算经六种》。明初修《永乐大典》，将此前算书分类抄入，现仅存卷一六三四三和一六三四四。清乾隆年间修《四库全书》，戴震从《永乐大典》辑录出《周髀算经》《九章算术》《海岛算经》《孙子算经》《五曹算经》《五经算术》和《夏侯阳算经》七部算经，并加校勘，抄入《四库全书》，并排印入《武英殿聚珍版丛书》。乾隆四十一年（1776）年底至次年年初戴震分别以汲古阁本和《永乐大典》的戴震辑录本（下简称戴震辑录本）为底本校勘汉唐算经，由孔继涵刊刻，始称《算经十书》，世称微波榭本。钱宝琮以微波榭本在清末庚寅年（1890）的一个翻刻本为底本校点《算经十书》，1963 年由中华书局出版。郭书春等分别以南宋本或汲古阁本、戴震辑录本为底本点校《算经十书》，1998 年由辽宁教育出版社出版，其繁体字修订本于 2001 年由台湾九章出版社出版。

（二）《九章算术》的内容

《九章算术》凡九卷，卷一《方田》，即刘徽所说“以御田畴界域”，

有各种面积公式及世界上最早最完整的分数四则运算法则。卷二《粟米》，即刘徽所说“以御交质变易”，是以今有术（今之三率法）为主体的比例算法。卷三《衰分》，即刘徽所说“以御贵贱禀税”，是比例分配算法，还有若干可以归结到今有术的比例问题。卷四《少广》，即刘徽所说“以御积幂方圆”，是面积与体积问题的逆运算，最重要的是提出了世界上最早的开平方与开立方程序。卷五《商功》，即刘徽所说“以御功程积实”，是各种体积公式和土方工程工作量的分配算法。卷六《均输》，即刘徽所说“以御远近劳费”，是赋税的合理负担算法，还有各种算术难题。卷七《盈不足》，即刘徽所说“以御隐杂互见”，是盈亏类问题的算法及其在其他计算问题中的应用。卷八《方程》，即刘徽所说“以御错糅正负”，是现今之线性方程组解法，还有正负数加减法则及列方程的方法。卷九《勾股》，即刘徽所说“以御高深广远”，是勾股定理、解勾股形、勾股容方、勾股容圆及简单的测望问题。

《九章算术》含有近百条十分抽象的术文，即公式、解法及246道例题。其中分数四则运算法则、比例和比例分配算法是这类算法在世界上最早的文献记录；盈不足算法、开方法、线性方程组解法、正负数加减法则及部分解勾股形方法等都超前其他文化传统几百年甚至千余年，是具有世界意义的重大成就。

（三）《九章算术》的体例和编纂

《九章算术》是经过几代人长期积累而成的，但到底是什么时候编定的则诸说不一。《九章算术》之名在现存资料中最先见于东汉灵帝光和二年（179）的大司农斛、权的铭文中：

> 依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，用齐七政，令海内都同。（国家计量总局编：《中国古代度量衡图集》，北京：文物出版社，1984年）

它在2世纪已成为官方规范度量衡器的经典，说明它的编纂成书要早得多。

1.《九章算术》的体例

为了解决《九章算术》的编纂问题，首先要分析它的体例。

学术界通行《九章算术》是一部应用问题集的说法。这种概括不够准确和全面，实际上它的主要部分并不是一题、一答、一术的问题集，而是算法统率例题的形式。

关于《九章算术》的术文与题目的关系，大体说来有以下几种情形（郭书春：《关于中国传统数学的“术”》，林东岱、李文林、虞言林主编：《数学与数学机械化》，济南：山东教育出版社，2001 年；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年。本文又做了修正）：

1）一类问题的抽象性术文统率一道或几道例题

这类内容往往是一术一题或一术多题，甚或数术数题。这里又有不同的情形：

（1）先给出一道或几道例题，然后给出一条或几条抽象性术文。例题中只有题目和答案，没有术文。比如，方田章列出 3 道分数加法的例题后给出了“合分术”，即分数加法法则。方田章全部，粟米章 2 条经率术、其率术和反其率术，少广章开方术、开圆术、开立方术和开立圆术，商功章除城垣等术与刍童等术及其例题之外的全部内容，均输章均输 4 术，盈不足章两盈两不足术及其一术、盈适足不足适足术等 3 术，勾股章勾股术、勾股容方、勾股容圆和测邑等 5 术，都属于这种情形，共 71 术，102 道例题。

（2）先给出抽象术文，再列出几道例题。例题只有题目和答案，亦没有术文。商功章城垣等术、刍童等术及其例题，盈不足章盈不足术及其一术及其例题便属于这种情形，共 4 术，14 道例题。

（3）先给出抽象性总术，再给出若干例题。例题包含了题目、答案及应用总术的术文。粟米章今有术及其 31 道例题，衰分章衰分术、返

衰术及其 9 道例题，少广章少广术及其 11 道例题，盈不足章使用盈不足术解决的 11 个一般计算问题，以及方程章方程术、正负术、损益术及其 18 道例题，共 7 术（盈不足诸术不再计在内），80 道例题。

这三种情形共 82 术，196 道题目，约占全书的 80%。在这里，术文是中心，是主体，都非常抽象严谨，而且具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序。题目是作为例题出现的，是依附于术文的，而不是相反。我们将之称为术文统率例题的形式。

2）应用问题集的形式

这类内容往往是一题一术。其术文的抽象程度也有所不同：

（1）关于一种问题的抽象性术文。比如均输章“凫雁”问，其术文虽未离开日数这种对象，但没有具体数字的运算，可以离开题目而独立存在，对同一类问题都是适用的。均输章长安至齐、牝牡二瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等问术文，勾股章持竿出户等问术文也如此。

（2）具体问题的算草。衰分章的非衰分题目、均输章的非均输类的大部分题目、勾股章的大部分解勾股形问题及“立四表望远”等题目的术文都以具体数字入算，是不能离开题目而独立存在的。

这部分共有 50 个题目，全部是衰分章的非衰分类问题、均输章的非典型均输类问题，以及勾股章的解勾股形和立四表望远等问题。它们都以题目为中心，术文只是所依附的题目的解法或演算细草。尽管第一种术文对某一种问题具有普适性，却不具有《九章算术》多数术文那样高度的抽象性、广泛的普适性等特点。

不言而喻，不能将《九章算术》概括为“一题、一答、一术”的应用问题集。我们认为，数学史上起码存在过三种不同体例的著作，一是像欧几里得《原本》那样形成一个公理化体系；一是像丢番图《算术》那样的应用问题集，中国的《孙子算经》等著作也是如此；《九章算术》的主体部分不同于这两者，而是第三种，即算法统率例题的形式。

不难看出，《九章算术》的术不是一个层次的。它起码可以分成三个层次：一是一类问题的非常抽象、严谨且具有普适性的算法；二是一种问题的比较抽象的算法；三是具体问题的算草。

这些抽象的和比较抽象的术文，当然是数学理论的体现。

2.《九章算术》的编纂

关于《九章算术》的编纂不仅涉及《九章算术》本身，而且涉及张苍、耿寿昌等某些历史人物的定位，还关系到对先秦数学的认识，是中国数学史研究中的重大问题。

1)《九章算术》编纂诸说

关于《九章算术》的编纂与成书年代主要有以下几种说法。刘徽《九章算术·序》说：

> 周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善筭命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。（郭书春汇校：《九章筭术新校》，合肥：中国科学技术大学出版社，2014 年。本书凡引《九章筭术》及其刘、李注的文字除另外说明均据此，恕不再注）

这就是说，“九数”在先秦已发展成《九章算术》，因暴秦焚书而散坏，西汉张苍、耿寿昌收集遗文，先后删补而成。这是现存史料中关于《九章算术》编纂的最早记载。

唐初王孝通《上缉古算经表》说：“昔周公制礼而有九数之名，窃寻九数即《九章筭术》是也。”[（唐）王孝通：《缉古算经》，郭书春点校。郭书春、刘钝校点：《算经十书》，沈阳：辽宁教育出版社，1998 年版；繁体字修订本，台北：台湾九章出版社，2001 年。本书凡引《缉古算经》的文字均据此，恕不再注] 南宋鲍澣之、清屈曾发等亦持是说。这种看法是将刘徽的说法修正成“九数”就是《九章算术》。

唐赝本《夏侯阳算经》说："黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》。"（郭书春点校：《夏侯阳算经》，郭书春、刘钝校点：《算经十书》）北宋贾宪将其所著书名冠以"黄帝"二字，当然亦认为《九章算术》系黄帝或隶首所作。南宋荣棨、元莫若等皆持此说。

清戴震否定张苍删补《九章算术》，他说："今考书内有长安、上林之名。上林苑在武帝时，苍在汉初，何缘预载？知述是书者，在西汉中叶后矣。"[（清）戴震：《九章算术提要》，"武英殿聚珍版丛书"本《九章算术》；郭书春主编：《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第 1 册，郑州：河南教育出版社，1993 年，郑州：大象出版社，2002 年、2015 年；郭书春汇校：《九章筭术新校》附录二] 戴震此说一出，张苍未参与删补《九章算术》，似成定论。尽管钱宝琮发现汉高祖时已有上林苑（实际上，秦朝就有上林苑 [（汉）司马迁：《史记·秦始皇本纪》，北京：中华书局，1959 年]，然而他没有推翻戴震的看法，反而将《九章算术》的成书时代向后推到公元 1 世纪下半叶（钱宝琮：《戴震算学天文著作考》，《浙江大学科学报告》1934 年第 1 卷第 1 期；李俨、钱宝琮：《李俨钱宝琮科学史全集》第 9 卷，沈阳：辽宁教育出版社，1998 年）。此后除少数学者仍坚持刘徽的说法外，论者多在西汉中叶至东汉中叶各抒己见，有西汉中叶齐人所作说，有公元前 1 世纪成书说，有公元元年前后新莽时期刘歆完成说，也有东汉马续编纂《九章算术》说。其中影响比较大的是钱宝琮的看法与近年李迪提出的刘歆完成说（李迪：《中国数学通史·上古到五代卷》，南京：江苏教育出版社，1997 年）。

我们认为刘徽的说法最为可靠。戴震、钱宝琮等尽管有不同程度的考证，但都没有足以推翻刘徽论断的史料；相反我们有充分证据说明刘徽的话是言之有据的。而且，今天的研究者不能将刘徽的论述与近人、今人的一些猜测等量齐观。刘徽去古未远，不仅能师承前贤关于《九章算术》编纂的可靠说法，而且能看到比戴震等人多得多的资料。如果找

不到刘徽的话与历史事实有矛盾，就只能相信刘徽的话，其他的说法都是不足为凭的。为了彻底解决这个问题，我们着重分析一下“九数”与《九章算术》的关系，以及《九章算术》所反映的物价所处的时代。

2）先秦“九数”

不管人们对《九章算术》编纂的看法多么相左，但都不否认《九章算术》与“九数”有联系。《周礼·地官司徒》云：

保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺。一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。

东汉郑玄（127—200）引郑众（？—83）曰：

九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、夕桀、勾股也（《周礼》，北京：中华书局，1979年影印清阮元校刻《十三经注疏》本。本书凡引用《周礼》文字，均据此）。

唐陆德明认为“夕桀”系衍文。郑众认为“方田”至“旁要”是先秦固有的数学门类，“重差”“勾股”是汉代发展起来的。

从春秋起，铁器在手工业和农业中的使用越来越普遍，大大促进了生产力的发展。王权衰微，整个社会的经济关系和政治结构经历着大变革。商、西周普遍实行的井田制开始解体。齐桓公实行按亩征收租税，鲁宣公十五年（前594）实行“初税亩”，履亩而税的实物租税制逐步取代力役租税制。这就需要准确测算耕地面积，促进了面积计算方法的进步。《左传》有两次筑城的记载，一次是宣公十一年，“令尹蔿艾猎城沂，使封人虑事，以授司徒。量功命日，分财用，平板干，称畚筑，程土物，议远迩，略基趾，具餱粮，度有司。事三旬而成，不愆于素”。一次是昭公三十二年（前510），与此大同小异（《春秋左氏传》，北京：中华书局，1979年影印清阮元校刻《十三经注疏》本）。其中要用到粟米互换、衰分方法、体积公式、测望方法及包括均输在内的其他数学方法。战国时代，农业、手工业和商业得到更大发展。与此相适应，春秋战国时期

的思想文化和学术也发生了变革。春秋时期“学在官府”的局面被打破，学术下移，畴人四散，私学兴起。到战国时，思想界出现了百家争鸣的繁荣局面。诸子互相辩诘，促进了学术的发展，提高了人们的抽象思维能力。这些都直接或间接地刺激了数学的发展。西周初年的“九数”发展到春秋战国，从内容到方法都发生了很大的飞跃，成为“二郑”所说的九个分支。而且九个分支所属的算法大都是抽象性比较高的，是先秦人们抽象思维能力较强的反映。

实际上，先秦典籍和出土文物中有若干“九数”的蛛丝马迹。《管子・问篇》云“人之开田而耕者几何家”，《商君书・算地》说“世主欲辟地治民”就必须“审数”，要计算各种形状的田地面积。《管子・小匡》载管仲提出“相地相衰其政”，这需要采取按田地的好坏分等级收税的衰分方法。以正方形来衡量田地的面积是最直观的。当土地不是正方形时，则要截长补短化为正方形。《墨子・非攻》载墨子说古者汤封于亳（bó），文王封于歧周，都是“绝长继短，方地百里”，《孟子・滕文公上》云“今滕绝长补短，将五十里也”。这是少广术的内容，并进而讨论乘方的逆运算——开方法。《管子・度地》谈到水土工程时，说春分之后，“夜日益短，昼日益长，利于作土功之事”，所以人们要区分四季的“程功”，即标准工作量。“均输”并不是汉武帝太初元年（前 104）开始实行的，《周礼》“均人掌均地政、均地守、均地职、均人民牛马车辇之力政”，显然是均输的思想。《管子》云“上下相命，若望参表，则邪者可知也”，应是旁要的方法。

学术界公认，秦汉数学简牍的绝大多数问题是秦和先秦的，其中有方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、勾股等类型的问题（彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，北京：科学出版社，2001 年；陈松长：《岳麓书院所藏秦简综述》，《文物》2009 年第 3 期）。

3）“九数”与《九章算术》

先秦“九数”与《九章算术》的章名相比较，只有差分、赢不足、旁要三项有差异，后者分别作衰分、盈不足、勾股。其中前两者含义无疑是一样的：“衰”（cuī）和“差”（cī）都是不同差别等级之义，“赢”和“盈”都是多余的意思，它们可以分别互训。“旁要”和“勾股”的名称差异较大，但据北宋贾宪的提示，旁要包括勾股术、勾股容方、容圆和简单的测望问题（主要是测邑方诸问）等内容（郭书春：《古代世界数学泰斗刘徽》，济南：山东科学技术出版社，1992 年，2013 年再修订版；繁体字修订本，台北：明文书局，1995 年）。

前面关于《九章算术》体例的分析说明，其中采取术文统率例题形式的三种情形覆盖了方田、粟米、少广、商功、盈不足、方程等六章的全部，以及衰分章的衰分问题、均输章的均输问题和勾股章的勾股术、勾股容方、勾股容圆、测邑等问题。而采取应用问题集形式的内容则是余下的衰分章的非衰分类问题、均输章中的非均输类问题，以及勾股章解勾股形和立四表望远等问题。这部分内容不仅体例、风格与术文统率例题的部分完全不同，而且衰分章、均输章中这些题目的性质与篇名不协调，编纂思想也有较大的差异，是明显的补缀。那么若将这三章剔除这些内容，并将卷九恢复“旁要”的篇名，则《九章算术》余下的内容不仅完全与篇名相符，都采取术文统率例题的形式，而且与“二郑”所说的“九数”惊人的一致。这无可辩驳地证明，郑众所说的“九数”在春秋战国时期确实存在，刘徽所说“九数之流，则《九章》是矣”是言之有据的。换言之，在先秦，确实存在着一部由“九数”发展而来的以传本《九章算术》的主体部分为基本内容，主要采取术文统率例题形式的《九章算术》。

4）《九章算术》所反映的物价所处的时代

日本堀毅《秦汉法制史考论》（北京：法律出版社，1988 年版）中

的《秦汉物价考》一文考证了《九章算术》中的物价所反映的时代。他引述《史记》《盐铁论》《汉书》及居延汉简等文献中粟、黍、麦、马、牛、羊、犬、豕、素、缣、丝、劳动收入、客庸、黄金、白金、土地、漆、酒等的价格，并与《九章算术》做比较，得出尽管有的物价，《九章算术》与汉代十分相近，但总的来说，差别是相当大的结论。他又分析了秦代及战国谷物、牛、羊、豕、犬、布疋、劳动收入等的物价，得出结论："《九章算术》基本上反映出战国、秦时的物价。"他认为，尤其是劳动收入的相近对证实上述结论具有很大的意义。因此，《九章算术》从整体上说反映了战国与秦代的物价水平，而不是汉代的物价水平。这为刘徽的说法提供了新的佐证。只是堀毅仍沿袭《九章算术》公元 1 世纪成书说，使其论述难以自洽。

将《九章算术》中的价格所反映的时代分野与其体例的差异结合起来分析将更加强刘徽的看法。《九章算术》与汉代的价格的比较分析共涉及 31 个问题，其中与汉代价格相差较大而与战国、秦代接近的问题有粟米章第 34、37、39—44 问，衰分章第 13、19 问，均输章第 3、4 问，盈不足章第 4、6、7 问，方程章第 7、8、11、17、18 问，凡 20 问。除了衰分章的第 13、19 问外，其体例全部属于术文统率例题形式的第一、三两种情形。与汉代价格相近而与战国、秦代价格相差较大的题目有：粟米章第 35、36 问，衰分章第 10—12、14、15 问，均输章第 7、15 问，盈不足章第 5、12 问，而与秦、战国时代尚无法比较的 3 问，共 11 问。其中有 7 问属于应用问题集的形式，只有粟米章 2 问、盈不足章 2 问属于术文统率例题形式的第三种情形，后 2 问还无法与秦、战国比较。

总之，在与战国、秦代价格接近，而与汉代差别较大的 20 个题目中，有 18 个，即 90% 属于术文统率例题的体例。与汉代价格接近而与战国、秦代差别较大的 11 个题目中，有 7 个，即超过 60% 属于应用问题集的体例。换言之，《九章算术》中的价格所反映的时代分野大体与其体例

的差异相吻合，为刘徽“九数之流，则《九章》是矣”的论断提供了佐证。

5）《九章算术》的编纂

上述考察都证明《九章算术》的主体，即采取术文统率例题的部分的方法和大多数例题在战国及秦代已完成了，而带有明显补缀性质的衰分、均输二章的后半部分以及勾股章解勾股形和立四表望远等内容，即采取应用问题集形式的部分是西汉人所为。换言之，刘徽关于《九章算术》编纂的论述是完全正确的。

否定刘徽关于张苍删补《九章算术》的论述的最重要论据就是汉武帝时才实行均输法。事实上，《盐铁论》提到的两种均输中，古之均输与《九章算术》的均输法相类似，而汉武帝时推行的今之均输与此不同。与《算数书》同时出土的竹简中有均输律。阜阳双古堆西汉文帝时的一个墓葬中出土的数学著作的残简上，有“□万一千二百户行二旬各到输所”（第 28 号简）、“千六百”（第 20 号简）等文字（胡平生：《阜阳双古堆汉简数术书简论》，中国文物研究所编：《出土文献研究》第四辑，北京：中华书局，1998 年），显然是《九章算术》均输章第一问的残文。这都从根本上推翻了戴震等人否定刘徽论述的论据。总之，现有的历史资料不仅没有与刘徽的论述相矛盾之处，反而证明了刘徽的看法。

此外，刘徽具有实事求是的严谨学风和高尚的道德品质，他的话是可信的。他如果没有可靠的资料，没有看到张苍、耿寿昌删补《九章算术》的确凿记载，对《九章算术》的编纂这样严肃的问题，是绝对不可能信口开河的。以刘徽的记载是孤证，没有旁证为由否定刘徽的话，是没有道理的。因为岁月延宕，天灾人祸，刘徽当时能看到的资料，流传到清中叶和今天的，百无一二。在这百无一二的残存中，即使像戴震和钱宝琮这样的大师也不可能全读到，读了也不可能全记住。对《史记》这样的史学经典中关于上林苑的多次记载，戴震都不甚了了，遑论其他。可见不宜囿于一己之知识随意否定历史文献的记载。

张苍等整理《九章算术》的指导思想是荀派儒学。荀子(约前313—前238)将《春秋左氏传》"授张苍",张苍将《左传》传给贾谊[(汉)刘向:《别录》,北京:中华书局,1979年影印清阮元校刻《十三经注疏》本;(唐)孔颖达:《春秋左传注疏》,北京:中华书局,1979年影印清阮元校刻《十三经注疏》本],荀子、张苍、贾谊是嫡传的师生关系。贾谊是西汉初荀派儒学的主要代表人物,可见张苍是信奉荀派儒学的。《荀子·儒效》将学问分成闻、见、知、行四个层次,而"学至于行而止矣"。《荀子·正名》同时主张"名无固宜,约之以命。约定俗成谓之宜,异于约则谓之不宜"。事实上,《九章算术》汇集了近百条对国计民生十分有用的抽象性极高的数学公式、解法,具有长于计算,以算法为中心,算法以解决实际问题为根本目的等特点,表现了"实事求是"的作风,正是接受了荀子的唯物主义思想(钱宝琮:《〈九章算术〉及其刘徽注与哲学思想的关系》,李俨、钱宝琮:《李俨钱宝琮科学史全集》第9卷,沈阳:辽宁教育出版社,1998年)。另外,《九章算术》对数学概念不作定义,对数学公式、解法没有推导和证明,也体现了荀子的上述思想。

6)《算数书》不是《九章算术》的前身

学术界一直关心《算数书》与《九章算术》的关系。1985年年初,出土《算数书》的消息公布于世,到同年年底,人们透露出来的消息说,《算数书》的算法类包括《合分》《增减分》《分乘》《径分》和《约分》等,算题类别还有《方田》《粟米》《衰分》《少广》《商功》《均输》和《盈不足》等,它同《九章算术》有很多相同之处,而时代要比《九章算术》早二百多年,它是《九章算术》之源(陈跃钧、阎频:《江陵张家山汉墓的年代及相关问题》,《考古》1985年第12期)。这段话模棱两可,容易理解成《九章算术》的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足等七章的章名,都是《算数书》的标题。因此,学术界多数认为《算数书》是《九章算术》的前身。有的学者甚至认为《算数书》是张苍编

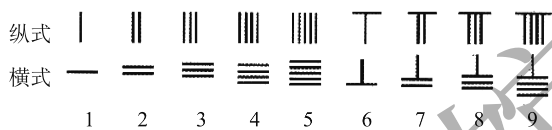
撰的。笔者对没有研究的东西历来不敢轻言。在《算数书》释文公布之后，我们发现其标题与《九章算术》的章名相同的只有方田、少广两条，其中《算数书》的方田条还是用赢不足术求 1 亩方田的边长，而不是传统的面积问题。除这两条外，两者术名相同的也只有约分、合分、径分(《九章算术》作“经分”)、少广、大广、里田等 6 条，而它们的题目和文字也有相当大的差别，只是少广条的题目与《九章算术》少广术的前 9 道例题的数字相同。认为《算数书》是《九章算术》的前身的学者忽视了一些重要事实：这部分内容在《算数书》中不足十分之一；《算数书》与《九章算术》有许多同类的内容，但却是不相同的题目；更重要的，《算数书》中有超过三分之二的内容是《九章算术》所没有的。因此，《算数书》不可能是《九章算术》的前身。当然，它们的某些内容有承袭关系或有一个共同的来源，则是无可怀疑的。至于孰早孰晚，有待于进一步考察［郭书春：《关于〈算数书〉与〈九章算术〉的关系》，《曲阜师范大学学报(自然科学版)》，2008 年第 34 卷第 3 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年］。当然，这些论述完全适用于秦简《数》和《算书》。

3. 算筹——《九章算术》时代的主要计算工具

由于《九章算术》及其刘徽注是一部高级数学著作，对计算工具没有介绍，但是多次使用“筭”字。它有多种含义，其中最重要的就是指计算工具算筹和筹算，如卷四开方术及开立方术中有“借一筭”，指借用一根算筹。用算筹计算，就是筹算。卷五阳马术刘徽注云“数而求穷之者，谓以情推，不用筹筭”。将《九章算术》及其刘徽注的公式、计算程序用于解决各种应用问题的计算，都是借助于算筹和筹算完成的。

算筹又称为筭、算、筹、策、算子等。它一般用竹或木制作，也有用象牙、骨或金属制作的。算筹是什么时候产生的，不可考。《老子》说“善数者不用筹策”。《左传·襄公三十年》(前 543)记载一位老人年纪的

旬日数为一个亥字的字谜。“史赵曰：亥有二首六身，下二如身，是其日数也。士文伯曰：然则二万六千六百有六旬也。”亥字拆开来为二丅⊥丅，即 26 660 日。这正是用算筹记数。这都说明最迟在春秋时期人们已经普遍使用算筹（图 1）。



(1) 算筹数字

(2) 陕西旬阳出土西汉算筹

图 1　算筹

算筹采用位值制记数，分纵横两式，如图 1（1）。《孙子算经》云：“一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”这是现存关于算筹记数法的最早记载。《夏侯阳算经》又补充道：“满六已上，五在上方。六不积算，五不单张。”20 世纪 70 年代几次出土了骨制算筹，截面为圆形，证实《汉书 · 律历志》关于算筹“径一分，长六寸”（分别合今 0.23 厘米、13.8 厘米）的记载是准确的（宝鸡市博物馆、千阳县文化馆、自然科学史研究所：《千阳县西汉墓中出土算筹》，《考古》1976 年第 2 期）。图 1（2）是 20 世纪 70 年代陕西旬阳县出土的西汉算筹。为避免滚动与布算面积过大，后来算筹逐渐变短，截面由圆变方。20 世纪 70 年代末石家庄东汉墓出土的算筹截面已变为方形，长度缩短为 8.9 厘米左右（李胜伍、郭书春：《石家庄东汉墓及其出土的算筹》，《考古》1982 年第 3 期。《郭书春数学史自选集》下册，山东科学技术出版社，2018 年版）。算

筹是当时世界上最方便的计算工具。将算筹纵横交错，并用空位表示 0，可以表示任何自然数，也可以表示分数、小数、负数，高次方程和线性方程组，甚至表示多元高次方程组。算筹加上先进的十进位值制记数法，是为中国古典数学长于计算的重要原因。算筹是明中叶以前中国的主要计算工具，中国古典数学的主要成就大都是借助算筹和筹算取得的。

自唐中叶起，随着商业繁荣，人们需要计算得快，便创造了各种乘除捷算法，并利用汉语数字都是单音节的特点，编成许多口诀，更加便于传诵记忆。乘除捷算法和歌诀的改进、简化，导致出现了新的矛盾：嘴念口诀很快，手摆弄算筹很慢，得心无法应手，导致最迟在宋代发明了珠算盘。珠算产生后与筹算并用了很久，在明中叶完全取代了筹算，到明末甚至数学家握算（筹）不知纵横，完成了中国计算工具的改革。此后一直到 20 世纪，珠算在中国、朝鲜、日本及东南亚国家和地区人们的生产、生活中发挥了巨大的作用。也许不是巧合，随着珠算的普及，中国古典数学走向衰微。个中原因，有待进一步探讨。

4. 张苍和耿寿昌

自戴震、钱宝琮等否定刘徽关于《九章算术》编纂的论述起，张苍、耿寿昌就被赶出了中国古代著名数学家的队伍。这很不公正。实际上，张苍、耿寿昌不仅是两汉最大的数学家，也是陈子（前 5 世纪）之后，刘徽之前约 700 年间最重要的数学家。

1）张苍

张苍，阳武（今河南原阳东南）人，秦汉政治家、数学家、天文学家。他仕秦为御史，主柱下方书，掌管文书、记事及官藏图书，明悉天下图书计籍。因获罪，逃归阳武。秦二世三年（前 207），参加刘邦起义军。汉高祖三年（前 204），因功封为北平侯。同年迁计相，以列侯居萧何丞相府，为主计，掌管各郡国的财政统计工作。他善于计算，精通律历，受高祖之命“定章程”[（汉）司马迁：《史记》，北京：中华书局，

1959 年]。高祖十一年，平定黥布反叛后，高祖命张苍为淮南王相。吕后当政时，高后六年（前 182）张苍升迁为御史大夫。吕后崩，张苍等协助周勃立刘恒为帝，是为文帝。汉文帝前元四年（前 176）张苍为丞相。前元十五年与公孙臣进行水德、土德的争论失败，由此起自绌。文帝后元二年（前 162）张苍遂以病辞职。景帝前元五年（前 152）去世，享年百余岁。张苍陪葬安陵（黄展岳：《张家山不会是张苍墓》，载《中国文物报》1994 年 5 月 1 日），一说葬在原籍阳武（《阳武县志》卷一）。

西汉初年，公卿将相多军吏，像张苍这样的学者封侯拜相，实属凤毛麟角。“苍本好书，无所不观，无所不通，而尤善律历。”他还著《张苍》十八篇，《汉书・艺文志》将其列入阴阳类 [（汉）班固《汉书》，北京：中华书局，1962 年]。“定章程”是张苍最重要的科学活动，如淳注“章程”曰：“章，历数之章术也。程，权、衡、丈、尺、斗、斛之平法也。”因此，它应包括历法、算学、度量衡等几个方面。确定汉初使用的历法，是张苍“定章程”中最重要的工作。《汉书・律历志上》说他比较了《黄帝》等六家历法，认为《颛顼历》“疏阔中最为微近”。司马迁说“汉家言律历者，本之张苍”，并非过誉之辞。张苍还“吹律调乐，入之音声，及以比定律令”，确定了汉初的律令。张苍又“若百工，天下作程品”，确立汉初的度量衡制度。汉承秦制，汉初的度量衡制度基本上沿袭秦制，肯定秦始皇统一度量衡的工作，也是张苍的贡献。

刘徽说张苍等“皆以善筭命世”，因《九章算术》“旧文之遗残，各称删补”，是为《九章算术》编定过程中最重要的阶段，大约也是张苍“定章程”中最杰出的工作。

2）耿寿昌

耿寿昌，数学家、理财家、天文学家。生卒及籍贯不详，宣帝（前 73—前 49 年在位）时为大司农中丞，是刘徽所说整理《九章算术》的第二位学者。大司农中丞的职务为他提供了收集、总结人们实际生产、

生活中的数学问题，加以发展、提高，增补《九章算术》得天独厚的条件。《汉书·食货志上》说他“善为算，能商功利”，得到宣帝的信任。他“习于商功分铢之事”。五凤（前57—前54）中，宣帝根据他的建议，“籴三辅、弘农、河东、上党、太原郡谷，足供京师，可以省关东漕卒过半”。耿寿昌又“令边郡皆筑仓，以谷贱时增其贾而籴，以利农。谷贵时减贾而粜，名曰常平仓，民便之”。皆收到了良好的社会效益，因而赐爵关内侯。耿寿昌还是天文历法学家。在浑天、盖天之争中，他主张浑天说［（汉）扬雄：《扬子法言·重黎》：“或问浑天，曰：落下闳营之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几乎几乎莫之能违也。”见《二十二子》，上海：上海古籍出版社1986年］。甘露二年（前52），他奏称“以图仪度日月行，考验天运状”［（晋）司马彪：《后汉书·律历志中》，北京：中华书局，1965年］。《汉书·艺文志》记载他还著《月行帛图》《月行度》，均亡佚。

（四）《九章算术》的历史地位

《九章算术》确立了中国古典数学的基本框架，为数学成为中国古代最为发达的基础科学学科之一奠定了基础，深刻影响了此后2000余年间中国和东方的数学。

1.《九章算术》的特点

一些古希腊数学家认为，数学是人们头脑思辨的产物，他们主要关注基于逻辑推理的抽象化的理论数学知识，对实际应用关注较少。而数学理论密切联系实际是《九章算术》的突出特点，因此必然重视计算。这是与古希腊数学的重要不同之处。《九章算术》以术文为中心，大部分术文是抽象的计算公式或计算程序。即使是面积、体积和勾股测望等几何问题，也没有关于图形的性质的任何命题。所有的问题都必须计算出其长度、面积、体积等数值，实际上是几何问题与算法相结合，或者说是几何问题的算法化。刘徽《九章算术序》说“至于以法相传，亦犹规矩、度量可得而共”，十分精辟地概括了《九章算术》形数结合这一

特点。这与古希腊数学着重考虑数和图形的性质，而较少考虑数值计算根本不同。

《九章算术》的算法具有机械化和构造性的特点。吴文俊说："我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化，是其两大特色。"（吴文俊：《从〈数书九章〉看中国传统数学构造性与机械化的特色》，《吴文俊论数学机械化》，济南：山东教育出版社，1995 年）《九章算术》当然是这两大特色的奠基性著作和突出代表。《九章算术》中的分数四则运算法则，开平方、开立方程序，方程术等，还有后来魏刘徽的求圆周率精确近似值的割圆术、方程新术等，都具有规格化的程序，是典型的机械化方法。

2.《九章算术》规范了中国古典数学的表达方式

《九章算术》与《数》《算书》《算数书》等秦汉数学简牍的表达方式有明显的不同。《九章算术》的表达方式十分规范、统一。而秦汉数学简牍的表达方式十分繁杂，没有统一的格式。这是先秦数学固有的，还是原简中的舛误？不能完全排除它们在传抄过程中出现舛误的可能性。但是，要说这些不同或大部分不同都是舛误，则不可能。我们认为，秦汉数学简牍关于分数、除法、问题的起首、发问和答案的各种各样的表示方式是先秦数学所固有的，秦汉数学简牍数学术语的纷杂表示方式反映了前《九章算术》时代中国古典数学的真实情况。有的学者以《九章算术》为模式改动《算数书》，是不合适的，因为这篡改了反映先秦数学真实状况的极为宝贵的原始资料。事实上，秦汉数学简牍所反映的先秦时期数学术语表达方式的多样性是数学早期发展的必然现象。那时诸侯林立，列国纷争，诸子辩难，百家争鸣，全国各地语言文字相左，数学术语不可能统一。秦朝短命，也来不及统一规范数学术语。张苍、耿寿昌整理、编定《九章算术》时，才完成了数学术语的统一与规范化。他们

统一了分数的表示，选取先秦已有的一种方式，将非名数分数 $\frac{a}{b}$ 统一表示为 b 分之 a，将名数分数 $m\frac{a}{b}$ 尺（或其他单位）表示为 m 尺 b 分尺之 a。他们统一了除法的表示，选取先秦的一种方式，先指明“法”，再指明“实”，最后，对抽象性的术文，说“实如法而一”或“实如法得一”，对非抽象性的具体运算，说“实如法得一尺（或其他单位）”。他们以先秦数学中已有的一种方式统一了问题的起首与发问，对问题的起首，一般用“今有”，同一条术文有多道例题时，自第 2 个题目起用“又有”，而对发问，则用“问……几何”。或“问……几何……”对问题的答案，张苍、耿寿昌统一采用“荅曰”来表示，等等。张苍、耿寿昌的这些工作实现了中国数学术语在西汉的重大转变，对规范中国古典数学术语具有巨大贡献。《九章算术》统一、规范数学术语的意义非常重大，它标志着中国古典数学发展到了一个新的阶段。此后直到 20 世纪初中国古典数学中断，中国数学著作中，分数、除法、答案的表示一直沿用《九章算术》的模式，数学问题的起首与发问方式，唐以后有的著作虽有变化，但都是“今有”与“几何”的同义语。

《九章算术》成书之后，中国古典数学著述基本上采取两种方式，一是以《九章算术》为楷模撰著新的著作，一是为《九章算术》作注，两者都取得了杰出的成就。历史上到底出现过多少种注释《九章算术》的著作，已不可考。目前学术界公认最重要的并且在不同程度上传世的是三国魏刘徽的《九章算术注》和唐李淳风等的《九章算术注释》，以及 11 世纪上半叶北宋贾宪的《黄帝九章算经细草》、南宋景定二年（1261）杨辉的《详解九章算法》。

3.《九章算术》与世界数学的主流

吴文俊基于对中国古典数学具有构造性、机械化的特点的认识，进而阐发了对世界数学主流的全新看法。他指出：“贯穿在整个数学发展历

史过程中有两个中心思想，一是公理化思想，另一是机械化思想。”（吴文俊：《数学中的公理化与机械化思想》，《吴文俊论数学机械化》，济南：山东教育出版社，1995 年）不久他又修正为“两条发展路线”，使表述更为清晰。接着他指出这两条发展路线互为消长，并明确道出了数学发展的主流：“在历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复，互为消长，交替成为数学发展中的主流。”（吴文俊：《〈现代数学新进展〉序》，《吴文俊论数学机械化》，济南：山东教育出版社，1995 年）这就从理论上回答了什么是世界数学发展的主流问题。而“中国古代数学，乃是机械化体系的代表”，从而解决了中国古典数学属于世界数学发展主流，并且是主流的两个主要倾向之一的问题。这就是说，在吴文俊看来，“数学发展的主流并不像以往有些西方数学史家所描述的那样只有单一的希腊演绎模式，还有与之平行的中国式数学，而就近代数学的产生而言，后者甚至更具有决定性的（或者说是主流的）意义”（李文林：《古为今用的典范——吴文俊教授的数学史研究》，林东岱、李文林、虞言林主编：《数学与数学机械化》，济南：山东教育出版社，2001 年）。《九章算术》及其所奠基的中国古典数学属于世界数学的主流。吴文俊从数学发展路线和模式的高度阐发世界数学的主流，从理论上批驳了某些西方权威关于中国古典数学“对于数学思想的主流没有重大的影响”（〔美〕M. 克莱因：《古今数学思想》第一册，张理京、张锦炎译，上海：上海科学技术出版社，1979 年）的错误看法。张苍、耿寿昌编定《九章算术》之时，处于地中海沿岸的灿烂辉煌的古希腊数学已越过它的顶峰。《九章算术》的成书标志着中国（及后来的印度和阿拉伯）已成为世界数学研究的一个重心，并为几个世纪之后中国取代古希腊成为世界数学研究最重要的中心奠定了基础，也标志着以研究数量关系为主、以归纳逻辑与演绎逻辑相结合的算法倾向逐渐取代以研究空间形式为主的公理化倾向，并成为世界数学发展的主流。

4.《九章算术》的缺点

不过,《九章算术》的缺点也十分明显。首先，分类标准不同一，其九章有的按应用，如方田、粟米、商功、均输等。有的按方法，如衰分、少广、盈不足、方程、勾股等。其次，内容有交错，有的文不对题，如若干异乘同除类问题是今有术问题，却编入衰分章。第三，对任何数学概念都没有定义。第四，对数学公式、解法没有推导，不做证明。这丝毫不是说《九章算术》在得出这些公式、解法时没有推导。因为其中有的非常复杂，不可能由直观或悟性得出，当时必有某种或严谨或粗疏的推导。实际上，刘徽《九章算术注》所记述的方亭、刍甍、刍童等多面体的棋验法所构造的长方体的体积，恰恰是这些多面体体积公式中的各项，说明当时是用棋验法推导其公式的。数学著作中没有定义，没有推导的缺点长期影响着中国古典数学。后来的数学著作除了刘徽的《九章算术注》等少数例外，大都没有定义和证明。

二、刘徽《九章算术注》和李淳风等《九章算术注释》

刘徽注是现存最早、成绩最大的《九章算术》注。它以演绎逻辑为主要方法全面证明了《九章算术》的算法，奠定了中国古典数学的理论基础。刘徽注的完成标志着中国古典数学发展到一个新的阶段。

（一）刘徽的籍贯与品格

刘徽，史书无传，生平不详。关于他的史料，除了他自述“幼习《九章》，长再详览”，“探赜之暇，遂悟其意”，遂“采其所见，为之作注”外，则只有《隋书·律历志》《晋书·律历志》说的“魏陈留王景元四年刘徽注《九章算术》”。

刘徽《九章算术注》原十卷，后来刘徽自撰自注的第十卷《重差》单行，改称《海岛算经》。刘徽还著《九章重差图》一卷，已佚。《隋书·经

籍志》载有刘徽《九章算田草》九卷、《九章术义序》一卷，后者可能是刘徽的《九章算术序》。还载《九章六曹算经》一卷（《玉海》作刘徽撰）。《九章算田草》《九章六曹算经》与刘徽《九章算术注》的关系，不得而知。

1．刘徽籍贯考

我们根据现有资料推定，刘徽的籍贯是淄乡，在今天山东省邹平县。

严敦杰（1917—1988）最先注意到，《宋史·礼志》算学祀典中，刘徽被封为淄乡男（严敦杰：《刘徽简传》,《科学史集刊》第 11 集，北京：地质出版社，1984 年）。同时受封 66 人，黄帝至殷、西周期间 10 人，多系传说人物或记载不详。春秋之后 56 人，其爵名来源有四种：①以其籍贯，有祖冲之等 41 人，占七成以上；②少数以其郡望；③少数以其主要活动地区之名；④个别的以其生前的爵名升级；后三种情况共 9 人。对于刘徽等 6 人，现存史籍中未找到他们的籍贯的记载。他们的爵名不出以上四种情况。男爵是最低的一级，淄乡男不可能是刘徽生前爵名升级，淄乡也不是刘姓郡望。那么，淄乡或者是刘徽的籍贯，或者是刘徽生前的主要活动地区。这两者中以前者的可能性较大。因此淄乡应该是刘徽的籍贯（郭书春：《刘徽祖籍考》,《自然辩证法通讯》1992 年第 14 卷第 3 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。

北宋王存《元丰九域志》淄州条载邹平县有一淄乡镇："邹平……孙家、赵岩口、淄乡、临河、啀婆五镇。"（［宋］王存：《元丰九域志》, 北京：中华书局，1984 年）《金史·地理志》记载淄乡为邹平三镇之一［（元）脱脱等：《金史》，北京：中华书局，1975 年］。《元丰九域志》成于元丰三年（1080），距刘徽受封的大观三年（1109）不到 30 年。因此，北宋所封淄乡男之淄乡当即邹平县淄乡。淄乡又作甾乡。古文淄、甾、菑相通。淄乡、菑乡、甾乡应是一个地方。

邹平县淄乡起码可以追溯到西汉。西汉有甾乡，据《汉书·王子侯表》，甾乡是西汉菑乡厘侯刘就的封国，封于建昭元年（前 38），子逢喜

嗣，免。据《汉书·诸侯王表》，刘就是梁敬王刘定国之子，刘定国是文帝刘恒子梁孝王刘武的玄孙。因此，菑乡侯刘就是文帝的七世孙。《汉书》中有两处淄乡的记载。一是《汉书·地理志》载山阳郡有一淄乡侯国。山阳郡在今山东西南部。一是《王子侯表》注明的甾乡侯封国，在济南郡。两者不同。《汉书·地理志》出自班固之手,《汉书·王子侯表》是班昭参考东观藏书写的。我们认为后者应更可靠些：菑乡侯的封地在济南郡。汉时邹平县属济南郡，联系到宋、金两朝邹平县有淄乡镇。因此，西汉所封之菑乡侯国就位于北宋邹平县的淄乡镇。菑乡侯二世而免，而菑乡的名称则保留了下来。

通过对刘徽籍贯的考察，可以探知他的生平与社交的某些线索，了解他成长的文化传统和氛围，因而是有意义的。刘徽成长的齐鲁地区，自先秦至魏晋，一直是中国的文化中心之一，魏晋时还是辩难之风的中心之一。齐鲁地区的数学自先秦至魏晋居全国的前列，两汉时期研究《九章算术》的学者许商、刘洪、郑玄、徐岳、王粲等，或在齐鲁地区活动过，或就是齐鲁人。刘徽的同代人，以重差术为其数学基础的《制图六体》的提出者裴秀虽不是齐鲁人，但他在魏末被封为济川侯，封地在高苑县济川墟［（唐）房玄龄等:《晋书·裴秀传》，北京：中华书局，1974 年］，距刘徽的家乡淄乡不远。刘徽与裴秀是否有交往，不得而知。但淄乡的人文环境为刘徽注《九章算术》，在数学上做出空前的贡献，提供了良好的客观环境和坚实的数学基础。

2. 刘徽的品格及其注《九章算术》时的年龄

刘徽具有实事求是的严谨学风和高尚的道德品质。他设计了牟合方盖，指出了解决球体积的正确途径，虽然功亏一篑，没有求出牟合方盖的体积，但他不仅没有掩饰自己的不足，反而直言自己的困惑，表示“以俟能言者”，表现了一位伟大学者实事求是的精神和虚怀若谷的胸怀。“隶首作数”是当时的传统看法，他却说“其详未之闻也”。在描绘了堑

堵的形状之后，他说“未闻所以名之为堑堵之说也”。整个刘徽注洋溢着言必有据、不讲空话的崇高精神。

由刘徽与嵇康（223—262）、王弼（226—249）等玄学名士思想上的联系，我们可以推断，刘徽的生年大约与嵇康、王弼相近，或稍晚一些，就是说，刘徽应该生于公元 3 世纪 20 年代后期或之后。换言之，魏景元四年（263）他注《九章算术》时，年仅 30 岁上下，或更小一点。蒋兆和将正在注《九章算术》的刘徽画成一位耄耋老人，有悖于魏晋的时代精神和特点［郭书春：《重温吴先生关于现代画家对古代数学家造像问题的教诲——庆祝吴文俊先生 90 华诞》，原载于台湾师范大学《HPM 通讯》2009 年第 12 卷第 10 期与《内蒙古师范大学学报（自然科学版）》2009 年第 5 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年；纪志刚、徐泽林主编：《论吴文俊的数学史业绩》，上海：上海交通大学出版社，2019 年］。

（二）刘徽《九章算术注》与魏晋辩难之风

1．魏晋辩难之风

东汉末年起，中国的经济、政治和社会思想发生了重大变革。汉末战乱和军阀混战使东汉开始出现的自给自足的庄园经济得到进一步发展，到魏晋已成为主要的经济形态。它们占有大量依附农民、佃客和部曲。部曲成为一个人数相当广泛的社会阶层，并带有世袭的性质。他们平时为庄园主劳动，战时为庄园主打仗。佃客、部曲与庄园主有极强的依附关系，他们的社会地位虽有所下降，但却使失去土地的农民重新耕种土地，缓和了社会危机，有利于遭到破坏的农业和手工业的恢复，因而是一种进步。

与庄园经济相适应的是门阀世族制度的确立。门阀世族发轫于西汉末年，东汉出现了若干世代公卿的家族。曹操主张用人“唯才是举”，曹丕实行九品中正制，其本意是不完全根据世族高低，也要以人才优劣选

士，但由于各州郡的中正官大都被著姓世族把持，反而出现了“上品无寒门，下品无世族”的局面。门阀世族取代了秦汉的世家地主，占据了政治舞台的中心。

社会动乱的加剧，伦理纲常的颓败，满口仁义道德的“名士”的丑行，动摇了儒学在思想界的统治地位，烦琐的两汉经学退出了历史舞台。人们试图从先秦诸子或两汉异端思想家那里寻求思想武器，作为维护封建秩序、名教纲常的理论根据，并为乱世中的新贵们服务。思想界面临着一次大解放，西汉独尊儒术之后受到压制的先秦诸子，甚至被视为异端的墨家，重新活跃起来，玄学与辩难之风兴起。何晏（？—249）、王弼等思想家将道家的“道法自然”与儒家的名教融会在一起，主张“名教本于自然”，用道家的“无为”取代儒家的“有为”，因他们活跃于正始年间（240—249），史称“正始之音”。他们用以谈资的《老子》《庄子》和《周易》称为“三玄”，后人将他们的学问称为“玄学”。玄学家们经常在一起辩论一些命题，互相诘难，称为“辩难之风”。玄学已经取代了儒家的正统思想地位，成为社会主要思潮。公元 249 年，司马懿发动政变，杀死曹魏的代表人物及何晏等正始名士，控制了政权，迫使一些名士进一步走上玄虚淡泊的道路。此后嵇康、阮籍（210—263）等竹林七贤任性不羁，蔑视礼法，主张“越名教而任自然”[（三国魏）嵇康：《释私论》，《晋书·嵇康传》，北京：中华书局，1974 年]，宣称“非汤武而薄周孔”[（三国魏）嵇康：《与山巨源绝交书》，《文选》卷四三，北京：中华书局，1977 年]，突破了正始之音力图调和儒道的观点，学术界的思想进一步解放。

玄学是研究自然与人的本性的学问，主张顺应自然的本性。玄学名士反对谶纬迷信，重视“理胜”。探讨思维规律，成为学者们的一项重要任务，这就是“析理”。“析理”最先见之于《庄子·天下篇》：“判天地之美，析万物之理。”（郭庆藩辑：《庄子集释》，北京：中华书局，1961 年）

但在此后很长一段时间内，“析理”并没有方法论的意义。而在魏晋时代，它却成为正始之音和辩难之风的要件（侯外庐、赵纪彬、杜国庠:《中国思想通史》第三卷，北京：人民出版社，1957 年）。“析理”是名士们进行辩论的主要方法，甚至成为辩难之风的代名词。一般认为，“析理”是郭象（252—312）注《庄子》时概括出来的。实际上，嵇康、刘徽早已使用“析理”。嵇康说：“非夫至精者，不能与之析理。”[（三国魏）嵇康:《琴赋》,《文选》卷一八，北京：中华书局，1977 年] 刘徽自述他注《九章算术》的宗旨是“解体用图，析理以辞”。玄学名士和刘徽“析理”时都遵循“易简”的规范。

数学由于其严密、艰深的特点，经常成为玄学家们“析理”的楷模。王弼《周易略例》说：“夫情伪之动，非数之所求也。故合散屈伸，与体相乖，形燥好静，质柔爱刚，体与情反，质与愿违，巧历不能定其算数。”嵇康《声无哀乐论》也说：“今未得之于心，而多恃前言以为谈证，自此以往，恐巧历不能纪耳。”巧历是指高明的天文学家和数学家。思想界公认，数学家是“析理”至精之人。嵇康还以数学知识之未尽说明摄生之理亦不能尽：“况天下微事，言所不能及，数所不能分，是以古人存而不论……今形象著名有数者，犹尚滞之，天地广远，品物多方，智之所知未若所不知者众也。”[（三国魏）嵇康:《难张辽叔〈宅无吉凶摄生论〉》,《嵇中散集》卷八,《文渊阁四库全书》本]

2. 刘徽的“析理”与辩难之风

数学的发展受到魏晋玄学的深刻影响。刘徽析《九章算术》之理，与思想界的“析理”当然有不同的内容，但是，刘徽对数学概念进行定义，追求概念的明晰，对《九章算术》的命题进行证明或驳正，追求推理的正确、证明的严谨等，即在追求数学的“理胜”上，与思想界的“析理”是一致的，格调是合拍的。在“析理”的原则上，刘徽与嵇康、王弼、何晏等都认为“析理”应“要约”“约而能周”，主张“举一反三”“触

类而长”，反对“多喻”“远引繁言”。不难看出，刘徽析数学之理，深受辩难之风中“析理”的影响。

事实上，刘徽不仅思想上与嵇康、王弼、何晏等有相通之处，而且他的许多用语、句法都与这些思想家相近。比如，刘徽在方田章合分术注说的“数同类者无远，数异类者无近。远而通体知，虽异位而相从也；近而殊形知，虽同列而相违也”，显然脱胎于何晏的“同类无远而相应，异类无近而不相违”[（三国魏）何晏:《无名论》，张湛注:《列子集释·仲尼篇》，北京：中华书局，1979 年]，但其寓意径庭；刘徽粟米章今有术注说的“少者多之始，一者数之母”是《老子》“无名天地之始，有名万物之母”与王弼《老子注》“一，数之始而物之极也”[（三国魏）王弼：《老子注·三十九章》，《二十二子》，上海：上海古籍出版社，1986 年]的缩合，而其旨趣迥异。这类例子还可以举出很多。因此，刘徽在数学中的“析理”应是当时辩难之风的一个侧面，他与魏晋玄学的思想家们应该有某种直接或间接的联系。

辩难之风中活跃起来的先秦诸子也成为刘徽数学创造的重要思想资料。儒家在魏晋时虽有削弱，但仍不失为重要的思想流派。刘徽自然受到儒家的影响。他直接引用孔子的话很多，比如反映他的治学方法的“告往知来”，源于《论语·学而》，“举一反三”源于《论语·述而》；他阐述出入相补原理的“各从其类”，源于孔子为《周易》乾卦写的“文言”。至于他受到被儒家视为经典的《周易》《周礼》的影响更明显：“算在六艺”“周公制礼而有九数”，都是《周礼》的记载。刘徽《九章算术序》中还引用了《周礼》用表测望太阳的记载及其郑玄注；刘徽关于八卦的作用及两仪四象的论述，反映他的分类思想的“方以类聚，物以群分”，治学方法的“引而申之”“触类而长之”，治学中要“易简”的思想，反映他对“言”与“意”关系的“言不尽意”，等等，都来自《周易·系辞》。

道家在汉以后成为中国统治思想的一部分。同时，道家作为一个学派仍然存在。辩难之风的三玄中，专门的道家著作居其二，即《老子》和《庄子》。《周易》是各家都尊崇的经典。《九章算术》方程章建立方程的损益术与《老子》的有关论述相近。刘徽说应该像庖丁了解牛的身体结构那样了解数学原理，应该像庖丁使用刀刃那样灵活运用数学方法，庖丁解牛的故事便出自《庄子·养生主》。刘徽在使用无穷小分割方法证明刘徽原理时提出的“至细曰微，微则无形”的思想，源于《庄子·秋水》中“至精无形”“无形者，数之所不能分也”。

不过，在先秦诸子中，刘徽最推崇的应该是墨家。一个明显的事实是，刘徽《九章算术序》及《九章算术注》中引用过大量先秦典籍，但是，明确提出书名的只有《周礼》《左氏传》及《墨子》这三部。事实上，刘徽割圆术中“割之又割，以至于不可割”的思想与《墨经》中“不可新”的端的命题一脉相承，而与名家“万世不竭”的思想明显不同。

这些都说明，当时思想界的“析理”与数学相辅相成、相得益彰。

（三）《九章算术注》的结构和创新

1.《九章算术注》的结构——“悟其意”与“采其所见”

自戴震起，人们实际上把刘徽注的内容都看成是刘徽自己的思想，这是一种误解。刘徽关于注《九章算术》的自述表明，他的《九章算术注》包括两部分内容：一是他“探赜之暇，遂悟其意”者，亦即自己的数学创造。二是“采其所见”者，即他搜集前代和同代人研究《九章算术》的成果。有人将“采其所见”翻译成“就提出自己的见解”，无疑是因不承认刘徽注中有前人的东西而做的曲译。

钱宝琮、严敦杰已经注意到刘徽注含有前人的贡献。钱宝琮在《中国数学史》中把圆周率和圆面积、圆锥体和球体积、十进分数、方程新术等内容称作刘徽在“《九章算术注》中的几个创作”，而把齐同术、图验法、棋验法视为《九章算术注》中“整理了各项解题方法的思想系统，

提高了《九章算术》的学术水平”的部分。严敦杰在《刘徽简传》中把刘徽学习《九章算术》分成“刘徽注文引《九章算术》以前的旧说”与“刘徽参考了他稍前或同时的各家《九章算术》”两种情况。

认识《九章算术注》的结构意义重大。首先，这填补了中国数学史的某些空白。例如，《九章算术》某些体积公式和解勾股形公式非常复杂、正确而抽象，刘徽注中以出入相补原理为基础的图验法和棋验法就是《九章算术》时代推导这些公式的方法。这对准确认识早期的中国数学史是不可多得的史料。

其次，可以准确地认识刘徽。刘徽注一方面多次严厉批评使用周三径一的做法，一方面又有大量使用周三径一的内容。如果将刘徽注的内容全部看成刘徽的创造，那么刘徽就是一位成就虽大但是思想混乱的人。若在刘徽注中剔除了“采其所见”者，那么刘徽就是一个成就伟大、思想深邃、逻辑清晰的学者。

最后，是正确校勘《九章算术》的基础。当戴震等人发现同一术的刘徽注中有不同思路时，便武断地将第二种思路改成李淳风等注释，盖导源于不懂得刘徽《九章算术注》有“采其所见”者。

2．刘徽注中“采其所见”者

刘徽注中“采其所见”的内容大体如下：

刘徽在圆田术注中说：“世传此法，莫肯精核，学者踵古，习其谬失。”在圆堢壔术注中又指出：“此章诸术亦以周三径一为率，皆非也。”都明确否定使用周三径一的做法。可见，刘徽注在以徽率 $\frac{157}{50}$ 修正原术之前所有基于周三径一论证原术的文字，都是“采其所见”者。

刘徽使用出入相补原理对解勾股形诸方法的论证与赵爽“勾股圆方图”基本一致。这都说明出入相补的方法不是刘徽的创造，而是刘徽以前，甚至在《九章算术》成书时代就流行的传统方法，被刘徽采入自己的注中。

多面体中的出入相补方法最主要的是棋验法。商功章方亭、阳马、

羡除、刍甍、刍童等术刘徽注的第一段及方锥术注、鳖腝术注都是棊验法。方亭术注谈到“说筭者”使用三品棊。“说筭者”无疑是刘徽以前的数学家，说明棊验法是先人们传下来的。有人说出入相补原理是刘徽的首创，是不符合历史事实的，它的创造应该追溯到秦汉数学简牍、《九章算术》时代甚至春秋时代（邹大海：《从先秦文献和〈算数书〉看出入相补原理的早期应用》，《中国文化研究》2004 年冬之卷）。

《九章算术》中圆堢壔与方堢壔、圆亭与方亭、圆锥与方锥都是成对出现的，说明是通过比较等高的圆体与方体的底面积从方体推导圆体的体积公式。刘徽开立圆术注指出《九章算术》犯了把球与外切圆柱体体积之比作为 3∶4，亦即球与外切圆柱体的大圆与大方的面积之比的错误，可为佐证。这是祖暅之原理的最初阶段。刘徽将其采入自己的注中。

当开方不尽时，刘徽说：“术或有以借筭加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。”设被开方数为 N，求得其根的整数部分为 a，即在开平方时，刘徽前，人们以 $a+\dfrac{N-a^2}{2a+1}$ 为根的近似值，并且 $a+\dfrac{N-a^2}{2a+1}<\sqrt{N}<a+\dfrac{N-a^2}{2a}$；在开立方时以 $a+\dfrac{N-a^3}{3a^2+1}$ 为根的近似值。

刘徽注中大量使用了齐同原理。但齐同原理也不是刘徽首先使用的。秦汉数学简牍和《九章算术》都已有“同”的概念。赵爽《周髀算经注》多次使用齐同术，可见齐同原理是刘徽之前的传统方法。

还有一些，不过，要完全区分算术、代数算法中哪些是刘徽采其所见者，哪些是刘徽的创新，不像面积、体积和勾股问题那么容易。

总之，刘徽之前的数学家，包括秦汉数学简牍和《九章算术》的历代编纂者在内，为推导、论证当时的算法做了可贵的努力。然而，这些努力大多很素朴、很原始，许多重要算法的论证仍停留在归纳阶段，因而并没有在数学上被严格证明。同样，《九章算术》的一些不准确或错误的公式没有被纠正。可以说，从《九章算术》成书到刘徽时的三四百

年间，数学理论建树并不显著，其数学思想和方法没有在《九章算术》基础上有大的突破，历史需要有人在数学上做出突破，刘徽承担了这个历史使命。

3．刘徽的创新

从刘徽的《九章算术注》中剔除“采其所见”者之后，我们看到，刘徽的创新主要体现在数学方法、数学证明和数学理论方面。

刘徽大大发展了《九章算术》的率概念和齐同原理，将其应用从《九章算术》的少量术文和题目拓展到大部分术文和 200 多个题目。他指出今有术是“都术”，率和齐同原理是“筭之纲纪”，借助率将中国古代数学的算法提高到理论的高度（郭书春：《〈九章算术〉和刘徽注中之率概念及其应用试析》，《科学史集刊》第 11 集，北京：地质出版社，1984 年；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。

刘徽继承发展了传统的出入相补原理，明确认识到，有限次的出入相补无法解决圆和四面体的求积问题。

在世界数学史上第一次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，是刘徽最杰出的贡献。许多希腊数学家都有无限小思想，他们认为，圆内接多边形可以接近圆，要多么接近就多么接近，但永远不能成为圆，他们从未将取极限的“步骤进行到无穷”，他们不是用极限思想而是用双重归谬法证明有关命题（［美］卡尔・B. 波耶：《微积分概念史》，上海师范大学数学系翻译组译，上海：上海人民出版社，1977 年）。刘徽用极限思想和无穷小分割方法严格证明了《九章算术》提出的圆面积公式和他自己提出的刘徽原理，将多面体的体积理论建立在无穷小分割基础之上（郭书春：《刘徽的极限理论》《刘徽的体积理论》，《科学史集刊》第 11 集，北京：地质出版社，1984 年；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。刘徽极限思想的深度超过了古希腊的同类思想，接近了微积分学的大门。刘徽明确认识了截面积原理，

是中国人完全认识祖暅之原理的关键一步。据此，他设计了牟合方盖，为后来的祖暅之开辟了彻底解决球体积问题的正确途径（郭书春：《从刘徽〈九章算术注〉看我国古代对祖暅公理的认识过程》，《辽宁师范大学学报（自然科学版）》1986 年，第 A1 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。

刘徽将极限思想应用于近似计算，在中国首创求圆周率的科学方法以及开方不尽求其“微数”的思想，奠定了中国的圆周率近似值计算领先世界约千年的基础。

刘徽修正了《九章算术》的若干错误和不精确之处，提出了许多新的公式和解法，大大改善并丰富了《九章算术》的内容。

刘徽给出了若干明确的数学定义，以演绎逻辑为主要方法全面论证了《九章算术》的算法（郭书春：《刘徽〈九章算术注〉中的定义及演绎逻辑试析》，《自然科学史研究》1983 年第 2 卷第 3 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年），认为数学像一株枝繁叶茂、条缕分析而具有同一本干的大树，标志着中国古典数学理论体系的完成（郭书春：《试论刘徽的数学理论体系》，《自然辩证法通讯》1987 年第 9 卷第 2 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。

（四）刘徽的数学定义和演绎推理

1．刘徽的定义

刘徽继承了《墨经》给概念以定义的传统，对许多数学概念如“幂”“率”“方程”“正负数”等都给出了严格的定义。刘徽的定义大体符合现代逻辑学关于定义的要求，比如刘徽关于“正负数”的定义中，“正负数”与“两筭得失相反”，其外延相同，既不过大，也不过小，是相称的；定义中没有包含被定义项，没有犯循环定义的错误；没有使用否定的表达，没有比喻或含混不清。刘徽其他的定义也大都符合这些要

求。并且一般说来，刘徽的定义一经给出，便在整个《九章算术注》中保持着同一性。

2．刘徽的演绎推理

许多人认为中国古代数学从未使用形式逻辑，这是根本错误的。刘徽不仅使用了举一反三、告往知来、触类而长等类比方法扩充数学知识，而且在论述中普遍使用了形式逻辑。他不仅使用了归纳推理，而且主要使用了演绎推理。试举几例。

1）三段论和关系推理

刘徽使用三段论的例子俯拾皆是。例如，盈不足术刘徽注针对两次假设有分数的情况说，如果两次假设有分数（M），须使分子相齐，分母相同（P）。这个问题（S）中两次假设都有分数（M），故这个问题（S）须使分子相齐，分母相同（P）。这个推理中含有并且只含有三个概念：两次假设有分数（中项 M），使分子相齐，分母相同（大项 P），这个问题（小项 S）。中项在大前提中周延，结论中概念的外延与它们在前提中的外延相同。最后，大前提是全称肯定判断，小前提是单称肯定判断，结论是单称肯定判断。可见这个推理完全符合三段论的 AAA 式规则。

作为数学著作，刘徽注更多地使用关系推理。关系推理实际上是三段论的一种特殊情形。刘徽所使用的关系判断中，以等量关系为最多，如设圆面积、周长、半径、直径分别是 S，L，r，d，刘徽在证明了圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$ 之后，证明圆面积的另一公式 $S=\frac{1}{4}Ld$ 正确的方式是：已知 $S=\frac{1}{2}Lr$（等量关系判断）及 $r=\frac{1}{2}d$（等量关系判断），故 $S=\frac{1}{2}L\times\frac{1}{2}d=\frac{1}{4}Ld$（等量关系判断）。

刘徽还使用不等量关系判断。例如，《九章算术》在开立圆术中使用了错误的球体积公式 $V=\frac{9}{16}d^3$，其中 V，d 分别是球的体积和直径。刘徽记载了这个错误公式的推导方式：以球直径 d 为边长的正方体与内切圆

柱体的体积之比为 4∶3，圆柱体与内切球的体积之比也是 4∶3（圆周率取 3），故正方体与内切球的体积之比为 16∶9。刘徽用两个圆柱体正交，其公共部分称作牟合方盖。刘徽论证《九章算术》方法错误的推理方式是：牟合方盖∶球 = 4∶π，而圆柱∶球≠牟合方盖∶球，故圆柱∶球≠4∶π。这就从根本上推翻了《九章算术》的公式。

2）假言推理

假言推理是数学推理中常用的一种形式。先看刘徽使用的充分条件假言推理。商功章羡除术刘徽注说“上连无成不方，故方锥与阳马同实”，这个推理写得十分简括，“成”训“层”，它的完备形式应该是：若两立体每一层都是相等的方形（P），则其体积相等（Q）。方锥与阳马每一层都是相等的方形（P），故方锥与阳马体积相等（Q）。其推理形式是：若 P，则 Q。今 P，故 Q。

在充分条件假言推理中，若 P，则 Q。若非 P，则 Q 真假不定。刘徽深深懂得这个道理。《九章算术》给出了堑堵的体积公式 $V_q = \frac{1}{2}abh$，阳马的体积公式

$$V_y = \frac{1}{3}abh \tag{1}$$

以及鳖臑的体积公式

$$V_b = \frac{1}{6}abh \tag{2}$$

其中 V_q，V_y，V_b 分别是堑堵、阳马、鳖臑的体积，a，b，h 分别是它们的宽、长、高。由于一个正方体可以分割为三个全等的阳马，六个三三全等、两两对称的鳖臑，那么“观其割分，则体势互通，盖易了也”。然而，当长、宽、高不相等时，一个长方体分割出的三个阳马不会全等，六个鳖臑既不三三全等，也不两两对称，刘徽认为无法用棋验法证明阳马、鳖臑的体积公式，其推理形式是：

若多面体体势互通（P），则其体积相等（Q）。

今多面体体势不互通（非 P），故难为之矣（Q 真假不定）。

为了证明阳马、鳖腝的体积公式，必须另辟蹊径，提出并证明了刘徽原理：在堑堵中恒有

$$V_y : V_b = 2 : 1 \tag{3}$$

3）选言推理

刘徽在许多地方使用选言推理。比如刘徽认为，在四则运算中，可以先乘后除，也可以先除后乘，“乘除之或先后，意各有所在而同归耳”（商功章负土术注）。在粟米章今有术注中，刘徽主张先乘后除，因为“先除后乘，或有余分，故术反之”。这就是一个选言推理。

4）二难推理

二难推理是假言推理和选言推理相结合的一种推理形式。其大前提是两个假言判断，小前提是一个选言判断。比如刘徽在证明圆面积公式 $S=\frac{1}{12}L^2$ 是不准确的方式，就是一个二难推理。刘徽的论证有两个假言前提，一是若以圆内接正六边形周长作为圆周长自乘，其 $\frac{1}{12}$ 是圆内接正十二边形的面积，小于圆面积。一是若令圆周自乘，其 $\frac{1}{12}$，则大于圆面积。还有一个选言前提：或者以圆内接正六边形周长自乘的 $\frac{1}{12}$，或者以圆周长自乘的 $\frac{1}{12}$。结论是：或小于圆面积，或大于圆面积，都证明上述公式不准确。

此外，刘徽还多次用到无限递推，实际上是数学归纳法的雏形。

以上只是刘徽注中大量演绎推理的只鳞半爪，但这足以说明现代形式逻辑教科书中的演绎推理的几种主要形式，刘徽都使用了。

3．刘徽的数学证明

上面所举的推理，由于其前提都是正确的，因而实际上都是数学证明或其一部分。刘徽最漂亮的证明首推对《九章算术》的圆面积公式和他自己提出的刘徽原理的证明。

对《九章算术》的圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$，刘徽认为以前的推证方式基于周三径一，实际上是以圆内接正六边形的周长作为圆周长，内接正十二边形面积作为圆面积，并没有证明圆面积，遂提出了使用极限思想和无穷小分割方法的证明方法。这是典型的综合法方式：从若干已知条件通过推理，引导到论题，是刘徽注中使用最多的证明方式。

刘徽用极限思想和无穷小分割方法对刘徽原理的证明可以归结为

$$(1)(2)\text{式} \xleftarrow{\text{分析法}} (3)\text{式} \begin{cases} \xrightarrow{\text{综合法}} \dfrac{3}{4}\text{中成立} \\ \xleftarrow{\text{分析法}} \dfrac{1}{4}\text{中成立} \xrightarrow{\text{综合法}} \cdots\cdots \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n}=0 \end{cases}$$

可见这个证明是以分析法为主，穿插从予到求的综合法。

（五）刘徽的数学理论体系

刘徽的分数、率、面积、体积和勾股等知识乃至整个数学知识都形成了自己的理论体系。而刘徽的体系与《九章算术》是有所不同的。以多面体体积问题为例，《九章算术》的推导方法主要是棋验法，因此三品棋在其中占据着中心的位置。其体积推导系统如图 2 所示。

刘徽多面体体积理论的基础是刘徽原理，而鳖腝是多面体体积问题的“功实之主”。为求其他多面体的体积，都要通过有限次分割，将其分割成长方体、堑堵、阳马、鳖腝等立体，然后求其体积之和解决之。刘徽的体积理论系统如图 3 所示。

众所周知，若干年前，人们就把数学描绘成一棵树的样子。在树根上标着代数、平面几何、三角、解析几何和无理数。从这些树根长出强大的树干微积分。然后，从树干的顶端发出许多枝条，包括高等数学所有的各个分支［Homard Eves，An Introduction to the History of Mathematics. 中译本〔美〕H・伊夫斯：《数学史概论》（修订本，欧阳绛译，张理京校），太原：山西经济出版社，1986 年］。实际上，早在

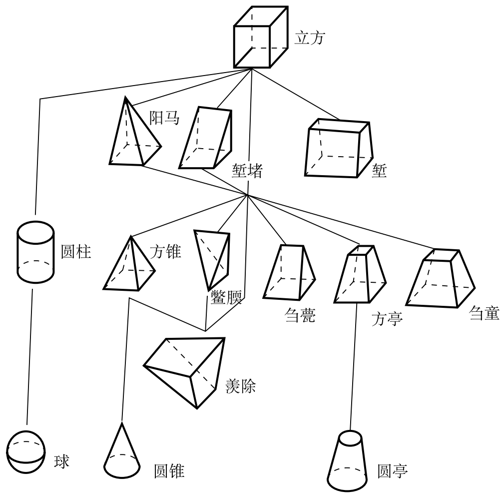


图 2 《九章算术》的立体体积之推导

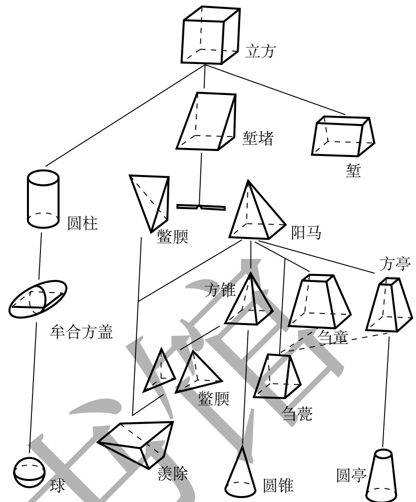


图 3 刘徽的立体体积理论体系

1700 多年前，刘徽就把数学看成一棵“枝条虽分而同本干”的大树。刘徽说，这棵数学之树“发其一端”，这个端就是刘徽所说的“亦犹规矩度量可得而共”。规矩代表空间形式，度量代表数量关系，也就是刘徽数学之树的根，数学方法是客观世界的空间形式和数量关系的统一，反映了中国古代数学形数结合，几何问题与算术、代数密切结合的特点。刘徽的数学之树如图 4 所示。

刘徽的数学体系“约而能周，通而不黩”。因为作注的形式，刘徽不得不将自己的数学知识分散到《九章算术》的各条术文和各个题目中，但是其中没有任何逻辑矛盾而不能自洽之处，可见其逻辑水平之高。

刘徽的数学体系是从《九章算术》的数学框架发展起来的，它继承了《九章算术》全部正确的内容，又加以改造、补充，与《九章算术》比较起来，发生了质的改变。因此，以刘徽、祖冲之为代表的魏晋南北朝数学，与以《九章算术》为代表的春秋战国西汉数学，在中国数学史上是两个阶段。前者建立了中国古典数学的框架，而后者奠定了其理论基础。

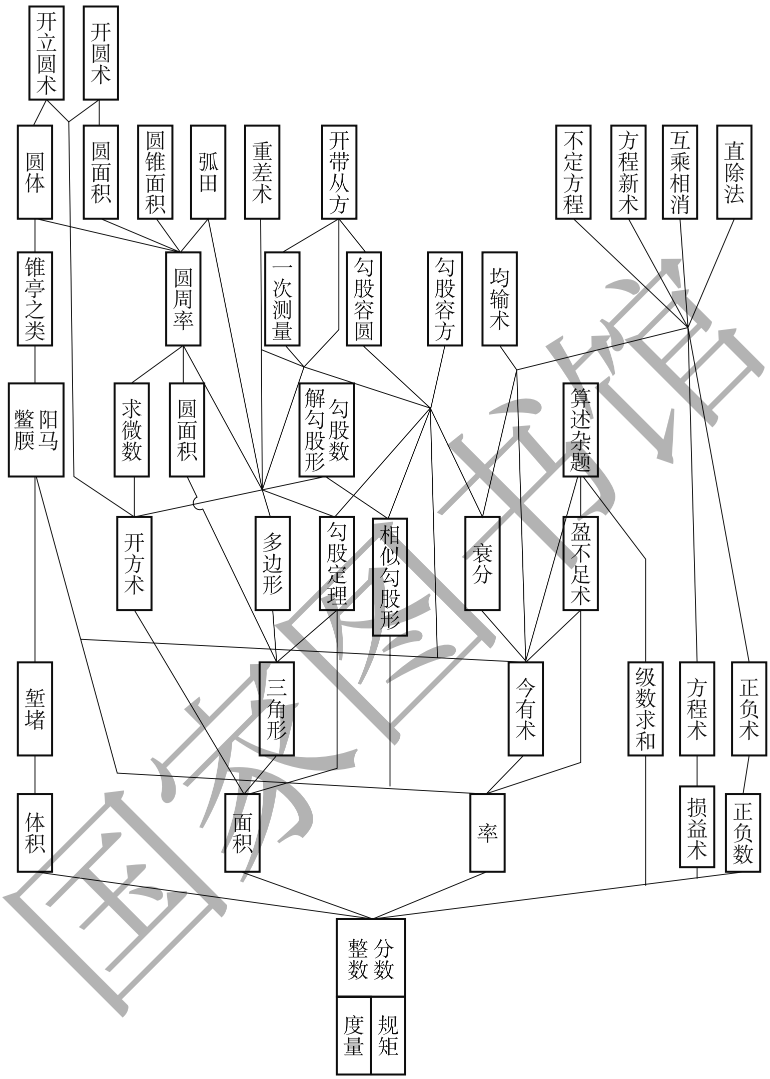


图 4　刘徽的数学之树

刘徽是在经学走向衰微的魏晋注《九章算术》的，按刘徽的数学水平，他完全可以将自己的数学知识整理成一部系统的著作，可是他没有这样做，而是采用了一种当时被经学界淘汰的形式：为已有的经典作注。可以说，刘徽注在内容上是革命的，而在形式上则是保守的。这种保守

的形式在某种意义上说限制了他的革命性内容在中国数学史上的影响，以致元之前的数学家虽常把他推崇为杰出数学家，但除祖冲之父子之外，几乎没有人对他的注进行研究，没有进一步发展他的数学理论，即使是筹算高潮的宋元时期，杰出的数学家对他的极限思想和无穷小分割方法也不置一辞（实际上，直到 20 世纪 70 年代末人们才搞懂了刘徽对圆面积公式和刘徽原理证明中的极限思想和无穷小分割方法，而在清乾嘉时期和 20 世纪 60 年代以前，人们都没有弄明白）。但是，任何坏事在一定条件下都可以转化为好事，这种注经的形式将刘徽注与《九章算术》捆绑在一起，使它避免了像祖冲之《缀术》那样因隋唐算学馆“学官莫能究其深奥，是故废而不理”而失传的厄运。

（六）李淳风及其《九章算术注释》

李淳风等的《九章算术注释》是李淳风与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等共同撰写的。

李淳风（602—670），岐州雍（今陕西省凤翔县）人。唐初天文学家、数学家。明天文、历算、阴阳之学。贞观初（627）淳风上书唐太宗批评所行戊寅元历的失误，建议重铸黄道浑仪。三年撰《乙巳元历》。七年撰《法象志》7 卷，系统论述了浑仪的发展，是制造新天文仪器的理论基础。浑天黄道仪于是年制成。十五年任太常博士迁太史丞，撰《晋书》《隋书》之《天文志》《律历志》和《五行志》，是中国天文学史、数学史、度量衡史的重要文献。《旧唐书·李淳风传》云，贞观二十二年（648），“太史监侯王思辩表称《五曹》《孙子》理多舛驳。淳风复与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒等受诏注《五曹》《孙子》十部算经”。高宗显庆元年（656）注释完成，“高宗令国学行用”。麟德元年（664），李淳风吸取隋刘焯在《皇极历》中创造的定朔计算方法及用二次内插法计算太阳、月亮的不均匀视运动等方法，制定《麟德历》，次年颁行。《麟德历》破除自古以来的章蔀纪元方法，废闰周而直接以无中气之月为闰

月（参见陈久金：《李淳风》，杜石然主编：《中国古代科学家传记》，北京：科学出版社，1992 年）。

可是《九章算术注释》除了少广章开立圆术注释引用祖暅之开立圆术，保存了祖暅之原理及其解决球体积的方法极为宝贵外，其他注释几无新意。李淳风多次指责刘徽。实际上，所有这些地方，错误的不是刘徽，而是李淳风等，表明他们不理解刘徽的理论贡献及新方法的重大意义，反映了其数学水平低下。这是隋唐时期中国数学比魏晋南北朝落后的一个侧面。

三、《九章算术》的版本与校勘

一般说来，一部古籍，越受重视，其版本就越多，版本纷乱就越严重。《九章算术》是中国古代最重要、最受重视的数学著作，因而不仅版本多，而且文字歧异讹舛特别严重（郭书春：《评戴震对〈九章算术〉的整理和校勘》《〈九章算术〉版本卮言》。后者见《第二届科学史研讨会汇刊》（台北），1991 年。《九章筭术新校》附录三。均见郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。

（一）《九章算术》的版本

1．抄本

《九章算术》经过唐初李淳风等整理注释后而成定本，并长期以抄本的形式流传。他们整理时肯定进行了删减。一个明显的证据就是王孝通《缉古算经》第一问注中录出的《九章算术·均输》的犬追兔术，与现传《九章算术》中的“犬追兔”问不同。

李淳风等整理的《九章算术》在唐中叶就形成了不同的抄本。唐李籍所撰《九章算术音义》为我们探索这些版本提供了可以说是唯一的因而是最为珍贵的资料（郭书春：《李籍〈九章算术音义〉初探》，《自然

科学史研究》，1989 年第 8 卷第 3 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。李籍提到可与南宋本、《大典》本及其戴震辑录本、杨辉本相比较的异文歧字有 19 条，李籍所用字与《大典》本或其戴震辑录本相同的有 17 条，不同者仅 2 条。谈到的与现传各本不同者有 9 条。前五卷 12 条中，李籍用字与《大典》本或其戴震辑录本相同者 10 条，不同者仅 2 条；与南宋本不同者 8 条，相同者仅 4 条；提到的另本与南宋本相同者 3 条。后五卷共 10 条，全与戴震辑录本相同，与杨辉本相同者 4 条，不同者 6 条。在南宋本、戴震辑录本、杨辉本共存的卷五约半卷中，李籍与之有字词歧异者 4 条，李籍所用与南宋本、杨辉本都不相同，而与戴震辑录本完全相同。

可见在李籍所在的唐中叶，《九章算术》除存在北宋秘书省本、《大典》本、杨辉本的母本之外，还有一二个甚至更多的抄本。这些抄本内容基本一致而又有若干细微差别。李籍撰《九章算术音义》所使用的抄本与《大典》本的母本十分接近，或者就是同一个抄本。南宋本和杨辉本的母本最为接近，或者就是同一个母本。南宋本和杨辉本的母本在李籍时代就已与《大典》本的母本不同。自清中叶起，人们说《永乐大典》将南宋本《九章算术》分类抄入，这是一种想当然的错误。

2．传本

北宋秘书省刻本是世界数学史上首次印刷的数学著作，可惜在北宋末年的战乱中大都散失，今已不传。《九章算术》的现传本有：

1）南宋本及汲古阁本

南宋历算学家鲍澣之于庆元六年（1200）在临安发现北宋秘书省刻本《九章筭经》，随即翻刻。刻工精美，错讹也少。可惜到明末，遗失后四卷及刘徽序，今藏于上海图书馆。这是世界上现存最早的印本数学著作。北京文物出版社 1980 年影印，收入《宋刻算经六种》。

清康熙二十三年（1684）汲古阁主人毛扆影抄南宋本卷一—五，是

为汲古阁本。北平故宫博物院 1932 年影印，收入《天禄琳琅丛书》。原本今藏于台北故宫博物院。汲古阁本有几个字与南宋本不同，如南宋本商功章“今粗疏”，汲古阁本讹作“今租疏”（清戴震整理的微波榭本进而讹作“祖”，清李潢认为此“祖”是祖冲之，以讹传讹。这是别话）。因此，不能将汲古阁本等同于南宋本。

2）《大典》本及其戴震辑录本

明永乐六年（1408）编定《永乐大典》，《九章算术》被分类抄入“筭”字条，是为《大典》本。今存卷一六三四三和一六三四四，藏于英国剑桥大学图书馆，其中分别有《九章算术》卷三下半卷和卷四的内容，是为完帙。1960 年影印，收入中华书局《永乐大典》，1993 年收入《中国科学技术典籍通汇・数学卷》（郭书春主编：《中国科学技术典籍通汇・数学卷》第 1 册，郑州：河南教育出版社，1993 年，郑州：大象出版社，2002 年、2015 年）。

清乾隆三十九年（1774），戴震在四库全书馆从《永乐大典》辑录出《九章算术》，今不存。但是，以四库文津阁本为底本，以聚珍版和四库文渊阁本参校，并根据校勘记恢复原文，基本上可以恢复戴震辑录本。校雠其与《大典》本的卷三下半卷和卷四可知，戴震辑录本的衍脱舛错相当严重，以至于戴震辑录本与《大典》本的差别远远超过《大典》本与南宋本的差别，给《九章算术》造成严重的版本混乱。此外，戴震辑录本阙盈不足章“共买豕”问，只有 245 问。

3）杨辉本

杨辉《详解九章算法》抄录的《九章算术》本文及刘、李注，今存卷三下半卷和卷四（见《永乐大典》），以及卷五约半卷和后四卷（清道光年间郁松年取石研斋抄本请宋景昌校勘刻入《宜稼堂丛书》）。石砚斋本鲁鱼亥豕极为严重，宋景昌根据微波榭本纠正之。根据宋景昌的校勘记恢复石砚斋本原文，再排除其鲁鱼亥豕，可得到杨辉本。由于该本之

所存的卷六一九，正是南宋本之所缺，极可宝贵。即使是卷五，尽管南宋本为全帙，杨辉本也可以为判断诸版本的分野和嬗递提供不可多得的资料。

3. 校勘本

清中叶以来，《九章算术》的校勘本有：

1）戴震校本

（1）戴震辑录校勘本与四库本、聚珍版、福建影刻本。

戴震对戴震辑录本进行了校勘，是为戴震辑录校勘本，今亦不存，可以以四库文津阁本为底本，以聚珍版与四库文渊阁本参校恢复之。戴震提出了大量的正确校勘，不过戴震也有大量错校，包括原文不误而误改者与原文确有舛误而校改亦不当者。

《四库全书》共抄了 7 部。乾隆四十年（1775）据戴震辑录校勘本抄成一部《九章算术》，收入藏于避暑山庄玉琴轩文津阁的《四库全书》，即文津阁本。该本 1915 年运至北京，现藏于国家图书馆。2005 年商务印书馆影印出版。这是戴校诸本《九章算术》中最准确的一部（郭书春：《关于〈九章筭术〉之文津阁本》，《自然科学史研究》2002 年第 31 卷第 4 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。后又抄成 3 部，分别藏于文渊阁（皇宫内）、文溯阁（沈阳）、文源阁（圆明园四达亭）。文渊阁本《九章算术》是乾隆四十九年（1784）根据戴震辑录校勘本的副本抄成的，错讹十分严重。20 世纪 40 年代末被国民党运至台湾，1986 台北商务印书馆影印出版。文溯阁本现藏于甘肃图书馆，其《九章算术》是根据戴震辑录校勘本的正本还是副本抄录的，有待研究。咸丰十年（1860）文源阁本被英法联军焚毁。乾隆五十四年又完成三部，藏于文澜阁（杭州玉兰堂东之藏经阁改建）、文汇阁（扬州大观堂）、文宗阁（镇江金山寺），咸丰四年太平军战事中遭焚毁。后补抄了文澜阁本，其《九章算术》是根据聚珍版抄录的。

乾隆四十年，根据乾隆的旨意，清宫武英殿将《九章算术》等用活字印刷，收入《武英殿聚珍版丛书》，世称聚珍版。聚珍版是根据戴震辑录校勘本的副本排印的，副本做了某些修改。乾隆发现《武英殿聚珍版丛书》初版有不少错误，遂命馆臣修订，修订本原藏于承德避暑山庄，今藏于南京博物院。1993年将其影印，收入《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册。

根据乾隆旨意，福建于乾隆四十一年影刻了《九章算术》，字形相近者错讹较多。

（2）豫簪堂本和微波榭本。

乾隆四十一年秋，戴震以辑录本为底本，前五卷以汲古阁本参校，重新整理《九章算术》，与《海岛算经》一起交给屈曾发合刻，世称豫簪堂本。

是年冬或其后，前五卷以汲古阁本、后四卷和刘徽序以戴震辑录本为底本，戴震整理出另一本《九章算术》，由孔继涵刻入微波榭本《算经十书》。孔继涵将该本冒充北宋本的翻刻本，并将刻书年代印成乾隆三十八年，以欺世人。微波榭本此后被多次翻刻、影印，影响极大。

在豫簪堂本和微波榭本中，戴震只保留了辑录校勘本中的30余条校勘记，而将他的大多数校勘冒充《九章算术》原文，还对《九章算术》做了大量修辞加工，进一步造成了《九章算术》版本混乱。此外，戴震恢复了辑录校勘本中误删的“实如法得一斤”的“斤”（或其他单位）字，但也出现一些新的错校。

2）戴震和李潢共同影响下的刊本

（1）李潢《九章算术细草图说》。

清李潢（？—1812）的《九章算术细草图说》以微波榭本为底本作细草图说，指出了戴震的几处误辑，对戴震将方程章正负术之“无人”改作“无入”等少数校勘提出异议，但对戴震的其他校勘则都遵从。李潢在“说”中提出了大量校勘，有一部分是对的，也有许多错校。尤其

他不能理解刘徽的极限思想和无穷小分割方法，不仅“说”不到位，甚至提出错校。

此外，李锐撰《方程新术草》，对方程新术做了校勘（《李氏算学遗书》），汪莱撰《校正〈九章算术〉及戴氏订讹》（《衡斋遗书》），都十分精当，被李潢采入《九章算术细草图说》。

（2）补刊本和广雅书局本“聚珍版”。

《武英殿聚珍版丛书》《九章算术》国内外馆藏已不多，冠以《武英殿聚珍版丛书》名号的《九章算术》多数是福建光绪十九年（1893）根据李潢的《九章算术细草图说》修订的聚珍版补刊本，以及光绪二十五年广东广雅书局翻刻的聚珍版补刊本。它们都是刻本，已无“聚珍”之意，而且有李潢的校勘，并且通过李潢本的底本微波榭本渗透了汲古阁本的文字。因此，在使用聚珍版时需要认真考察，否则容易张冠李戴。

3）钱校本

钱宝琮校点的《九章算术》收入中华书局 1963 年出版的《算经十书》上册，称为钱校本。钱校本纠正了戴震、李潢等人的大量错校，指出了 20 世纪校勘《九章算术》的正确方向。他还提出了若干正确的校勘，指出微波榭本是戴震校本，揭穿了孔继涵将戴校本冒充宋本翻刻本，并将刻书年代刻成乾隆三十八年（1773）的骗局。然而钱校本以微波榭本在清光绪庚寅年（1890）的翻刻本为底本，沿袭了戴校本的大量失误及庚寅本的舛误，并把汲古阁本等同于南宋本，把广雅书局本等同于聚珍版，将近 20 条李潢的校勘说成“聚珍版”，另外，也有一些错校，对戴震、李潢的许多错校，尚未纠正。

此外，1983 年科学出版社出版了白尚恕的《九章算术注释》。

4）汇校本系列及拓展

20 世纪 80 年代，笔者通过对近 20 个《九章算术》版本的校雠，发现戴震之后 200 余年间《九章算术》的版本十分混乱，错校极多，于是

重新校勘了《九章算术》，1990 年由辽宁教育出版社出版了汇校《九章算术》，称为汇校本。其前五卷以南宋本为底本，后四卷及刘徽序以聚珍版、文渊阁四库本对校而成的戴震辑录本为底本，恢复了被戴震等人改错的南宋本、《大典》本不误原文约 450 处，采用了戴震、李潢、汪莱、李锐、钱宝琮等大量的正确校勘，重新校勘了若干原文确有舛错而前人校勘亦不恰当之处，并对若干原文舛误而前人漏校之处进行了校勘。不过该本也有个别错校和错字。此外，汇校本还汇集了近 20 个不同版本的资料。

汇校本脱销后本应出版修订本，但由于发现李继闵的《九章算术校证》抄袭了汇校本的 300 余条校勘，再次出版时不得不照印汇校本原文，而将新的校勘意见和版本资料作为增补，这就是《汇校〈九章筭术〉》（增补版），2004 年由辽宁教育出版社和台湾九章出版社出版。汇校本增补版恢复了该书原名《九章筭术》。该版 2013 年入选国家新闻出版广电总局和全国古籍整理出版规划领导小组首届向全国推荐的 60 年来出版的 91 部优秀古籍整理图书之一。

2013 年笔者重新汇校《九章算术》，其前五卷如同汇校《九章算术》及其增补版，以南宋本为底本，其后四卷与刘徽序则以四库文津阁本及聚珍版、文渊阁四库本参校形成的戴震辑录本为底本，并吸收了新的校勘成果和版本资料，是为《九章筭术新校》，次年由中国科学技术大学出版社出版。

由于《九章算术》版本的复杂情况，笔者又做了几个校勘本。一是《大典》本版本链的校勘本，其卷三后半卷、卷四以《大典》本为底本，其余各卷及刘徽序以戴震辑录本为底本，先后校点两次，收入海南国际新闻出版中心 1997 年出版的《传世藏书》、首都师范大学出版社 2007 年出版的《国学备览》。此旨在力图复原唐中叶李籍使用的那个抄本的面貌。

二是南宋本—杨辉本版本链的校勘本，其前五卷以南宋本为底本，后四卷及刘徽序以杨辉本为底本，这就是《算经十书》本，1998 年辽宁

教育出版社、2001 年台湾九章出版社先后出版。1998 年辽宁教育出版社出版的译注《九章算术》、2009 年上海古籍出版社出版的《九章筭术译注》亦如此。此旨在力图复原李籍提到的唐中叶另一个抄本的面貌。

三是在各传本中择善而从的校勘本，这就是中法对照本。

5）其他校本

1993 年陕西科学技术出版社出版了李继闵的《九章算术校证》。

1996 年湖北教育出版社出版了沈康身的《九章算术导读》。

4. 外文译本

《九章算术》本文早已被译成日文、俄文、德文等外文。含有刘徽注的外文译本有：

（1）日译本。1980 年日本朝日出版社出版了川原秀成的日译本《刘徽注〈九章算术〉》，是为首次将刘徽注译成外文。

（2）英译本。Shen Kangshen, John N. Crossley and Anthony W.-C. Lun,*The Nine Chapters on the Art of Mathematics*. Oxford University Press and Science Press,1999，其蓝本是《九章算术导读》，自然有曲解刘徽注之处。

2013 年辽宁教育出版社出版了郭书春校勘及译注、道本周（J.W. Dauben）和徐义保英译及注释的汉英对照《九章算术》（*Nine Chapters on the Art of Mathematics*），纳入国家新闻出版署组织的《大中华文库》。

（3）中法对照本。K. Chemla et Guo Shuchun: *LES NEUF CHAPITRES: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. 根据中国科学院与法国国家科学研究中心（CNRS）科学合作协议，笔者与法国林力娜（K. Chemla）合作完成的中法对照本《九章算术》，于 2004 年由法国 Dunod 出版社出版，2005 年重印，2006 年获法兰西学士院平山郁夫奖，2018 年入展改革开放 40 周年引才引智成果展。

（4）捷译本。2008 年捷克 Matfyzpress 出版了 Jiří Hudeček（胡吉瑞）

翻译的捷克文本《九章算术》。

(二)《九章算术》的校勘

所谓《九章算术》的校勘，主要是对刘徽注的校勘。因为《九章算术》本文的错讹极少，大量的错讹在刘徽注中，而且对刘徽注的校勘做好了，对李淳风等注释的校勘大多便可以迎刃而解。虽然200余年来《九章算术》的校勘成绩很大，但依旧存在错校极多的实际情况，我们认为，20世纪校勘《九章算术》的主要任务是：剔除戴震辑录本的粗疏和各版本转换中出现的衍脱舛误及戴震的修辞加工，恢复被戴震等人错改的不误原文，重校原文舛误而前人校勘不当者，校勘原文舛误而前人漏校者。

校勘中应该特别注意以下各点：

第一，认识篇章结构及主旨是校勘的基础。《九章算术》是在先秦“九数”基础上发展起来的，中经许多人之手。各卷体例不一致，分类标准不统一，卷题与内容有抵牾，有的题目排列顺序不甚合理等现象，是其固有的，不必随意改动。

刘徽注对《九章算术》有重大发展，其数学思想与数学方法不完全同于后者，因此，不能轻易以经改注或以注改经。

刘徽注中有“采其所见”者，刘徽又主张“广异法”，因此在发现刘徽注中有思路不一致便将其一改成李淳风等注释是错误的。

认清篇章的主旨，在文字舛误而又不能使用本校法、他校法而必须使用理校法时，可以确定校勘的方向。

第二，算理是校勘的根本。因未正确理解刘徽注的数学内容而错改不误原文的现象，在《九章算术》的校勘中屡屡发生。同时，准确的中国数学史知识是正确校勘的前提。错误的校勘还表现在对数学方法的发展历史缺乏了解而臆改。

第三，正确句读，弄懂古文是理解数学内容，避免误改原文的保证。戴震、李潢等有不少地方因句读失当而错改了原文。他们也有多处不懂

得刘徽注中有些字的古义与近世通用的意义迥然不同而导致错校。

第四，要掌握古文的修辞规律。戴震等人改动了刘徽注 400 余条不误的原文，大多是对古汉语的修辞规律及语法现象了解不够造成的。比如他们不了解古文中有省字、省词、省句等各种省略情形，特别是乘、除、约等动词之后可以省去宾词，不了解古文有上下文异字同义与同字异义、实字活用、文中有自注，以及错综成文等各种修辞方法而提出不少错校。

四、汉至明对《九章算术》的研究

对《九章算术》的版本与校勘的概述实际上是唐以后《九章算术》研究历程的一个侧面，其实主要是对刘徽的研究。

张苍、耿寿昌编订《九章算术》之后，对《九章算术》的研究是中国数学史研究的重要方面。这里概述明代之前除魏刘徽、唐李淳风等之外的其他研究。

（一）西汉至宋元的研究

1．西汉末至魏晋

《汉书·艺文志》术数类载《许商算术》二十六卷、《杜忠算术》十六卷。许商，长安人，汉成帝（前 33—前 7）时先后任博士、将作大匠、河堤都尉、大司农等职，多次领导治河工程。杜忠生平不详。宋《广韵》卷四“筭”字条云“又有《九章》术，汉许商、杜忠，吴陈炽，魏王粲并善之”，李学勤《汇校〈九章算术〉跋》认为此二书应该是许、杜对《九章算术》的注释（李学勤：《汇校〈九章算术〉跋》，郭书春汇校：《九章算术》，沈阳：辽宁教育出版社，1990 年，汇校《九章筭术》增补版，辽宁教育出版社、台北九章出版社 2001 年版，《九章筭术新校》，中国科学技术大学出版社 2014 年版）。

《后汉书·马援传》云：马续，扶风人，“博观群籍，善《九章算术》”。他是经学大师马融（79—166）之兄，研究《九章算术》当在公元1世纪下半叶。

刘洪（约129—约210），泰山蒙阴人。《后汉书·律历志》云他“能为算”，造《乾象历》。唐释慧琳《大藏经音义》有“刘洪《九章算术》”的记载。

郑玄（127—200），北海高密人，是汉末综合今、古文经学的大师。《后汉书·郑玄传》说他“师事京兆第五元先”，始通《九章算术》。晚年又向刘洪学习《乾象历》。可见第五元先也精通《九章算术》。

徐岳，东莱（今山东莱州一带）人，受业于刘洪。清姚振宗《后汉书·艺文志》认为徐岳受《乾象历》时“并受《九章》于洪而更为之注”。据王朗（？—228）《塞势》称：“余所与游处，唯东莱徐先生素习《九章》，能为计数。”（《太平御览》卷七五四）《隋书·经籍志》载《九章算术》二卷，徐岳、甄鸾重述，《九章别术》二卷（《玉海》作“岳、鸾《换算别术》二卷”），《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰，《九章算经》二卷（一作一卷），徐岳注，《新唐书·艺文志》还有徐岳《九章算术》九卷。这是五种不同的著作，还是同一部著作的不同抄本，不得而知。

阚泽（？—243），会稽人，东吴大臣。于徐岳受《乾象历》，著《乾象历注》。唐徐坚《初学记·器物部》有“阚泽《九章》曰”云云。

此外，刘歆（？—23）、张衡（78—139）、蔡邕（133—192）、王粲（177—217）、陆绩、赵爽、王蕃（228—266）等都是知名的数学家，当然通《九章算术》。这些关于《九章算术》的著作均不存，无疑成为刘徽注《九章算术》“采其所见”的部分来源。

2. 南北朝至唐初

《南齐书》之《祖冲之传》载祖冲之“注《九章》，造《缀述》数十篇”。《日本国见在书目》除载《缀术》六卷外，还有“《九章》九卷，祖中注；

《九章术义》九卷，祖中注，《海岛》二卷，祖仲注”。此祖中、祖仲当是祖冲之。据《隋书·律历志》，祖冲之“开差幂、开差立，兼以正负参之”，这是求解负系数三次方程的方法。《缀术》的贡献当然不只这些，它应该是比刘徽注水平更高的著作。遗憾的是，由于隋唐算学馆的学官对《缀术》“莫能究其深奥，是故废而不理”，遂失传。幸好李淳风等《九章算术注释》保存了祖暅之的开立圆术。祖暅之提出了祖暅之原理，纠正了《九章算术》的错误方法。

《隋书·经籍志》载李淳风以前关于《九章算术》的著作还有《九章算术》一卷，李遵义疏，《九九算术》二卷，杨淑撰，《九章推图经法》一卷，张峻撰。《旧唐书·经籍志》《新唐书·艺文志》还有《九章算经》九卷，甄鸾撰，《九章杂算文》二卷，刘佑撰，《九章算术疏》(《新唐书》作《九经术疏》）九卷，宋泉之撰。甄鸾，北周中山无极（今河北无极）人，六世纪在世。史籍载他撰注算经极多，《算经十书》中除《缀术》《缉古算经》外都有他撰注的记载。刘佑，荥阳人，仕隋，曾与刘辉等编订历法。

史书记载通《九章算术》的还有殷绍、成公兴、法穆、释昙影、信都芳、顾越、刘焯等。由此可见，南北朝时期，尽管南北分裂，政权更迭频仍，学者们却从未间断对《九章算术》的研究。可惜他们的著作一点也没有保存下来。

唐初王孝通撰《缉古算术》一卷。他“寻《九章》商功篇有平地役功受袤之术，至于上宽下狭、前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹邪之用”，“遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十问，名曰《缉古》”。其中绝大多数问题要列出三次、四次方程解答。由于《缀术》失传，它成为中国数学史上第一次记载三次、四次方程的著作。根据王孝通的本意和《缉古算经》的内容，它可以看作《九章算术》的补充。

3. 唐中叶、宋元

李淳风之后至宋初，未见为《九章算术》作注的记载，只有唐中叶李籍的《九章算术音义》传世，它对几百条字、词注反切，释词义，对后人理解《九章算术》的内容有一定帮助。

11 世纪上半叶，北宋贾宪撰《黄帝九章算经细草》九卷、《算法斅古集》二卷，后者已失传。前者因成为杨辉《详解九章算法》的底本而尚存约三分之二（郭书春：《贾宪〈黄帝九章算经细草〉初探》，《自然科学史研究》1988 年第 7 卷第 4 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。贾宪的履历、籍贯不详，他是大历算学家楚衍的弟子。《黄帝九章算经细草》是宋元数学高潮的奠基性著作。贾宪总结刘徽等对《九章算术》开方法的改进，提出“立成释锁法”，将传统开方法推广到开任意高次方，并首创“开方作法本源”（今称贾宪三角）作为其“立成”。贾宪三角在西方称作帕斯卡（1623—1662）三角。他又创造增乘开方法，它是以随乘随加代替一次使用贾宪三角的系数，更加简捷的开方法。这二者在阿拉伯和西方都晚出数百年。贾宪对《九章算术》某些含有题设对象甚至具体数字的术文做了进一步抽象，还提出了若干新的解法（郭书春：《贾宪的数学成就》，《自然辩证法通讯》1989 年第 11 卷第 1 期；郭书春：《郭书春数学史自选集》，济南：山东科学技术出版社，2018 年）。笔者经过考证，认为《详解九章算法》不仅含有《九章》本文、刘徽注、李淳风等注释和杨辉详解，还抄录了贾宪的细草。因此今存衰分章后半章、少广章（《永乐大典》）、商功章（约半章）、均输章、盈不足章、方程章、勾股章（宜稼堂本《详解九章算法》）。

北宋沈括（1031—1095）《梦溪笔谈》（胡道静：《梦溪笔谈校证・技艺》，上海：上海古籍出版社，1987 年）研究了《九章算术》的弧田术，提出了已知弧田（弓形）的矢与所在圆的直径，求弦和弧长方法的会圆术。他又研究了刍童的体积公式，认为不能用它计算酒坛等堆垛中的个

数，便创造隙积术，开创了垛积术，即高阶等差级数求和这一中国古典数学新分支，在宋元时期取得重大成就。

南宋荣棨于绍兴十八年（1148）撰《黄帝九章序》、鲍澣之于庆元六年（1200）撰《九章算经后序》都以《九章算术》为“算经之首”，荣棨说《九章算术》于数学“犹儒者之六经，医家之《难》《素》，兵法之《孙子》”。

杨辉于南宋景定二年（1261）撰《详解九章算法》十二卷。杨辉是钱塘人，南宋末年在台州（今浙江省）做过地方行政官，时人说他“以廉饬己，以儒饰吏，吐胸中之灵机，续前贤之奥旨”。他还著有《日用算法》（1262，残）、《乘除通变本末》（1274）、《田亩比类乘除捷法》（1275）、《续古摘奇算法》（1275），后三种后合刻为《杨辉算法》。《详解九章算法》对《九章算术》的 80 个问题做了详解，即所谓“解题”和“比类”。后者是《九章算术》注解形式的一个创新。其中商功章的比类发展了沈括的隙积术，提出了几个二阶等差级数求和公式。其末卷的“纂类”按数学方法将《九章算术》的算法和 246 个问题重新分成乘除、互换、合率、分率、衰分、叠积、盈不足、方程、勾股等 9 类，尽管有的不尽合理，但他试图按数学方法统一分类，首次突破《九章算术》的框架，是个创举。杨辉《乘除通变本末》提出了中国数学史上第一个教学计划“习算纲目”，说在学习了乘、除、诸分、开方之后，《九章算术》“自余方田、粟米，只须一日。下编衰分功在立衰，少广全类合分，商功皆是折变，均输取用衰分、互乘，每一章作三日演习。盈不足、方程、勾股用法颇杂，每一章作四日演习”，再消化《九章纂类》，“《九章》之义尽矣”。

史籍中未见秦九韶、李冶、朱世杰等对《九章算术》的注释，但他们都精通《九章算术》，并在《九章算术》基础上或有所发展，或填补其空白。秦九韶将数学分成内算与外算，“《九章》所载即《周官》九数，

系于方圆者为叀术，皆曰外算”。他发现历算学家推算历法常用到的大衍法“不载《九章》，未有能推之者”，以为是方程术，“误也”，遂创造大衍总数术及其核心大衍求一术，即一次同余方程组解法。此发轫于《孙子算经》“物不知数”问，西方称为中国剩余定理。这是现代数论中的重要分支。李冶取在《九章算术》勾股容圆术基础上发展起来的洞渊九容，演绎成勾股容圆的专题著作《测圆海镜》。他认为，各种数学著作“无虑百家，然皆以《九章》为祖，而刘徽、李淳风又加注释，而此道益明”（李冶：《益古演段・自序》，郭书春主编：《中国科学技术典籍通汇・数学卷》，郑州：河南教育出版社，1993 年；郑州：大象出版社，2002 年、2015 年）。《九章算术》是朱世杰《算学启蒙》的基础，赵城元镇为朱世杰《算学启蒙》撰序，莫若、祖颐分别为朱世杰《四元玉鉴》撰序和后序，都从《九章算术》开始谈数学的发展。

（二）《九章算术》在明代的厄运

《九章算术》在明代遭到前所未有的厄运。首先，尽管《永乐大典》在卷一六三三七至一六三五七抄录了《九章算术》的内容，但《大典》本藏于深宫，一般人读不到。而宋本基本失传，到清初南宋本只剩半部，成为藏书家的古董。

其次，明代尽管以《九章》命名的著作颇多，传世的有景泰元年（1450）吴敬的《九章算法比类大全》，失传的如刘仕隆永乐二十二年（1424）的《九章通明算法》、成化十四年（1478）许荣的《九章详注算法》九卷、成化十九年余进的《九章详通算法》等，即使是书名没有“九章”二字，如嘉靖三年（1524）王文素所撰《算学宝鉴》、万历二十年（1592）程大位所撰《算法统宗》等，其结构仍不脱《九章算术》的格局。可是，当时《九章算术》在社会上已不流传，像吴敬、王文素这样的知名数学家也读不到，只能通过杨辉的书了解《九章算术》的内容，因此他们无法区分《九章算术》的原题和杨辉所录贾宪细草新设的题目，而

将其统统归于《九章算术》。比如,《算学宝鉴》面积类说引用《九章算术》桑生田中央、眉田、锭田、三角田、环田等 5 个问题，实际上只有环田是《九章算术》的。

五、《九章算术》及其刘徽注的现代价值

研究《九章算术》及其刘徽注有极大的现代价值。这里仅提出以下几点。

（一）改革中小学数学教材

中国古典数学在 20 世纪初中断，中国数学融入世界统一的数学，是历史的进步。但是中国数学从此全盘西化，完全剔除中国古典数学，则是不可取的。正像倒为孩子洗澡的脏水，连孩子也倒走了。20 世纪 30 年代以来，许多趣味数学读物津津乐道的印度莲花问题，实际上源于《九章算术》勾股章的“引葭赴岸”问，却晚了约千年，这是数典忘祖。事实上，中国古典数学，特别是《九章算术》及其刘徽注的许多思想和方法不仅与现代中小学数学教学内容高度契合，而且有的思想和方法比现行教材还优越。比如，掌握《九章算术》和刘徽注中的位值制、机械化思想和几何问题的代数化等特点，会使学生更容易掌握数学方法。率的思想和方法对改革中小学数学教材仍有现实意义，许多学校做出了有益的尝试。倘使在编订中小学数学教材时全面汲取《九章算术》及其刘徽的思想和方法，会大大改善其内容。

（二）对现代数学研究的启迪

20 世纪 80 年代吴文俊就指出：“由于近代计算机的出现，其所需数学的方式方法，正与《九章》传统的算法体系若合符节。《九章》所蕴含的思想影响，必将日益显著。”（吴文俊：《汇校九章算术序》，见郭书春汇校:《九章算术》，沈阳：辽宁教育出版社，1990 年；汇校《九章筭术》

增补版，辽宁教育出版社、台北：九章出版社，2004 年版；《九章筭术新校》，合肥：中国科学技术大学出版社，2014 年版）；吴文俊：《吴文俊论数学机械化》，济南：山东教育出版社，1995 年）《九章算术》及其刘徽注的大多数成就，如分数四则运算法则、今有术和衰分术、盈不足术、开方术、方程术（线性方程组解法）、求圆周率程序等，都具有构造性、算法化和机械化特征，因此它们可以毫无困难地转化为程序用计算机来实现。吴文俊根据这种认识，开创了数学机械化理论。这是《九章算术》及其刘徽注启迪现代数学研究的典型事例。

（三）传统文化教育的优秀读物

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一，而《九章算术》及其刘徽注分别奠定了中国古典数学基本框架和理论基础，登上了当时世界数学研究的高峰。它们阐发的运算法则和公式、解法是颠扑不破的真理，有力地驳斥了学术界流传的中国古代没有科学的谬说。刘徽对演绎逻辑的娴熟使用、高超的数学证明，有力地驳斥了学术界流传的中国古代数学只有应用没有理论的谬说。因此，《九章算术》及其刘徽注是目前进行传统文化教育和爱国主义教育的优秀读物。

（四）对中外文化交流的意义

《九章算术》和《几何原本》是古代世界产生的两部伟大数学著作，它们东西辉映，深刻影响了它们之后两千年间东方和西方的数学。西方学术界对中国古代数学有许多偏见，除了少数欧洲中心论者外，大多数是因为他们不了解《九章算术》及其刘徽注。而国内学术界的许多偏见的源头在国外。因此，向外国尤其是欧美学术界原原本本地介绍《九章算术》及其刘徽注，是中国学者的重要任务。这也是开展中外文化交流，使外国人了解中国古代文明的一项重要工作。中国专家与以某种外语为母语的专家合作，将中国古典数学著作译成外文，是快捷、准确的途径。以笔者为首席专家的国家社会科学基金重大项目“刘徽、李淳风、贾宪、

杨辉注《九章算术》的研究与英译”（2017—2021）目前正在执行，它的完成会将一个更好的汉英对照《九章算术》贡献给国内外学术界。还应该将《九章算术》及其刘徽注译成俄文、德文、西班牙文、韩文、日文等外文。

六、本书的体例

最后，对本书的体例做一交待。

（一）本书的底本

本书以郭书春汇校《九章筭术新校》（中国科学技术大学出版社，2014 年）为底本，删去校勘符号，只录出笔者认为准确的文字。对盈不足术及其刘徽注笔者做了新的校勘。为了统一体例，对本书新的校勘，不出校勘符号，只在校勘记中说明舛误和校勘的文字。

（二）本书的构成

本书原典分《九章算术》本文、魏刘徽注、唐李淳风等注释三种内容，《九章算术》本文用大字（小四号宋体），刘徽注、李淳风等注释均用小字（五号仿宋）。对李淳风等注释，南宋本标注为“臣淳风等谨按”，《大典》本、杨辉本等标注为“淳风等按”，本书统统依从南宋本；凡没有标注者，学术界一般认为是刘徽注。

本书按节注释与点评。分节的原则是：对采取术文统率例题形式的部分，以某条术文及其例题与刘、李注作为一节。对采取应用问题集形式的部分，或一题一节，或将类型相同并且相连的几个题目作为一节，不改变问题原来的顺序。

笔者的注释、点评及旁批用小五号，注释用宋体，点评与旁批用仿宋体。

（三）某些字词的用字

根据《中华传统文化百部经典》的规定，对某些字词做如下处理：

1. 关于“筭”与“算”

汉许慎《说文解字》云：“筭，长六寸，计历数者。从竹，从弄，言常弄乃不误也。”又云：“算，数也。从竹，从具，读若筭。”清段玉裁注更明确地说：“筭为算之器，算为筭之用。”简言之，“筭”是计算工具算筹，而“算”是计算。可是秦汉数学简牍、南宋本诸算经及《永乐大典》所引诸算经，不管是算筹之义和计算之义，均作“筭”，鲜有用“算”者。《九章算术》在东汉光和大司农斛、权铭文中作《九章筭术》。“筭”是《现代汉语词典》《新华字典》的规范汉字，不是异体字或繁体字，明代以前的算书大都用此字。清初开始用“算”字，长期与“筭”字并用。20世纪50年代后基本上用“算”字，鲜有用“筭”字者。因此，本书引用《九章算术》及其刘、李注均遵从原文用“筭”字，而笔者撰写的文字用“算”。

2. 关于“荅”与“答”

南宋本、杨辉本《九章筭术》各题的答案之“答”，均作“荅”。对荅之荅原作“畣”。荅本是小豆之名，后来借为对荅之荅。《玉篇》：“荅，当也。”《五经文字·艸部》：“荅：此荅本是小豆之一名，对荅之荅本作畣。经典及人间行此已久，故不可改。”《尔雅》：“畣，然也。”《玉篇》：“畣，今作荅。”对荅之荅，后作答。《广韵》：“答，当也。亦作荅。”《大典》本《九章筭术》各题的答案均作“答”。本书的答案，凡引原文皆遵从南宋本用“荅”（包括后四卷亦从南宋本改），而笔者撰写的文字则遵从目前惯例用“答”字。

3. 关于“句”与“勾”

南宋本及《永乐大典》所引诸算经对九数之第九类“句股”及直角三角形的短直角边均作“句”，明之后开始有用“勾”者。清至民国期

间，两者并用，而用“勾”者越来越多，20 世纪 50 年代后只用“勾”字，不再用“句”，以致《新华字典》中“句”字不再有“勾股”之“勾”的释义。同样，本书引用《九章算术》及其刘、李注均用“句”，而笔者撰写的文字则均用“勾”字。

许逸民、冯立昇、邹大海等先生在本书修改过程中提出了许多中肯的意见，对提高本书质量大有裨益，在此表示衷心感谢。关于《九章算术》及其刘徽注的研究，不仅是中国数学史研究中最重要的课题，也是一个没有穷尽的历史长河。笔者从事这一研究有年，发表了几十篇论文，出版了几部著作，有的著作还多次重印或修订再版。实际上，每一部著述都是阶段性的，都对以往的著述有所修正和改进。由于笔者文史功底薄弱，尽管有《中华传统文化百部经典》编委会及办公室同仁的不断督促、提醒，有专家的宝贵意见，本书必然还会有不足之处，恳请方家不吝指教，笔者不胜感激。

九章筭术

序[1]

刘徽

昔在庖牺氏始画八卦[2]，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术，以合六爻之变。暨于黄帝神而化之[3]，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。记称“隶首作数”[4]，其详未之闻也。按：周公制礼而有九数[5]，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书[6]，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善筭命世。

刘徽之后“通神明”“类万物”成为中国古代关于数学两种作用的传统思想。刘徽的“通神明之德”指通达客观世界的变化规律，但是还是会被人利用将数学导向象数学，而“类万物”则是中国古典数学的主要作用。

这是现存文献中关于《九章算术》编纂过程最早的也是最可靠的论述。

苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异[7]，而所论者多近语也。

[注释]

[1] 九章筭术序：《九章筭术新校》作“九章筭术”注序，今改。筭本指算筹。《说文解字》：“筭，长六寸，计历数者。从竹，从弄，言常弄乃不误也。”又同算。《尔雅》：“筭，数也。”陆德明《经典释文》：“筭，字又作算。”算：数、计算。《说文解字》：“算，数也。从竹，从具，读若筭。” [2] “昔在庖牺氏始画八卦”五句：是说从前，庖牺氏曾制作八卦，为的是通达客观世界变化的规律，描摹其万物的情状；又作九九之术，为的是符合六爻的变化。庖牺氏又作包牺氏、伏羲氏、宓羲、伏戏、牺皇、皇羲等，神话中的人类始祖，人类由他与其妹女娲婚配而产生。始，曾，尝。一作训首先、开始，亦通。八卦，《周易》中的八种符号。构成卦的横画叫作爻。—是阳爻，--是阴爻。每三爻合成一卦，可得八卦：☰（乾），☳（震），☱（兑），☲（离），☴（巽），☵（坎），☶（艮），☷（坤），分别象征天、雷、泽、火、风、水、山、地。其中乾与坤、震与巽、坎与离、艮与兑是对立的。神明本指主宰自然界和人类社会变化的神灵，后来演变为古代哲学用以说明变化的术语。《管子・内业》认为精气“流于天地之间，谓之鬼神”，《周易・系辞下》云“阴阳合德，而刚柔有体，以体天地之变，以通神明之德”，进而将通过事物的变化预测未来的能力称为神。《周易・系辞下》云“阴阳不测之谓神”，弱化了人格神的意义，成为哲学术语。德，客观规律。类，象，相似，像，描摹。情，情状。九九，即九九乘法表，因古代自“九九八十一”始，故名。元朱世杰《筭学启蒙》（1299）才改为从“一一如一”起。后亦指数学。

李籍《九章算术音义》(下简称《音义》)引师古曰:“九九筭术,若今《九章》《五曹》之辈。”术,方法,解法,算法、程序,宋元时期又称为“法”。术的本义是邑中的道路,引申为途径,又引申为解决问题的途径,这就是方法、手段。《淮南子·人间训》云“见本而知末,观指而睹归,执一而应万,握要而治详,谓之术”,与《九章算术》的“术”同义。六爻,将八卦中每两卦相叠所构成的卦象。每卦含有六个阴爻或阳爻,故名。凡有六十四卦。 [3]“暨于黄帝神而化之”六句:是说及至黄帝神妙地使之潜移默化,将其引伸,于是建立历法的纲纪,校正律管使乐曲和谐。用它们考察道的本原,然后两仪、四象的精微之气可以效法。黄帝,姬姓,号轩辕氏,传说中的中华民族祖先,败炎帝,杀蚩尤,被拥戴为部落联盟首领,以代神农氏。命大桡作甲子,容成造历,羲和占日,常仪占月,臾区占星气,伶伦造律吕,隶首作算数。相传蚕桑、医药、舟车、宫室、文字等之制,皆创始于黄帝之时,反映了新石器时代的情况。历,推算日月星辰运行及季节时令的方法,又指历书。纪,古代纪年月的单位,十二年为一纪。律吕,乐律、音律的统称。律本是用来校正乐音标准的管状仪器。以管的长短来确定音阶。从低音算起,有十二根管,成奇数的六根管黄钟、太蔟、姑洗、蕤宾、夷则、无射叫作律,成偶数的六根管大吕、夹钟、仲吕、林钟、南吕、应钟叫作吕,统称十二律。稽,考核,调查。两仪指天、地,宋儒又谓指阴、阳。四象指金、木、水、火。《周易·系辞上》:“太极生两仪,两仪生四象,四象生八卦。”王弼注:“四象谓金、木、水、火。震木、离火、兑金、坎水,各主一时。”一指春、夏、秋、冬四时,体现于卦上,则指少阳、老阳、少阴、老阴四种爻象。气,古代的哲学概念。诸家理解不一,一指主观精神,一指形成宇宙万物的最根本的物质实体,刘徽当用后者之义。 [4]“记称‘隶首作

数’”二句：是说典籍记载隶首创作了算学，其详细情形没有听说过。记，典籍，当指《世本》。《世本》云：“隶首作数。”一作“隶首作算数”。隶首相传为黄帝的臣子。数，算学、数学。 [5]“周公制礼而有九数”三句：是说周公制定礼乐制度时就有九数。九数经过发展，就成为《九章算术》。周公是周初政治家，名姬旦，协助周武王灭商，后又辅佐周成王。相传他制定了周朝的典章礼乐制度。九数，古代数学的九个分支。东汉末郑玄《周礼注》引东汉初郑众云：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。今有重差、夕桀、句股也。”唐陆德明等谓“夕桀”非郑注。周公制礼时的“九数”不会完全同于二郑所云“九数”，但这表明数学在周公时代已形成为一门学科。流的本义是水的流动，引申为演变、变化。 [6]“往者暴秦焚书”八句：是说过去，残暴的秦朝焚书，导致经术散坏。自那以后，西汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以擅长数学而闻名于世。张苍等人凭借残缺的原有文本，先后进行删削补充。暴秦焚书指秦始皇于三十四年（前 213）下令除秦记、医药、卜筮、种树书外，民间所藏所有《诗》《书》和百家书皆交地方官焚毁，是为对中国文化的一次极大破坏。刘徽认为，《九章算术》在秦始皇焚书时遭到破坏。实际上项羽掠咸阳，对典籍的破坏不会亚于秦始皇焚书。称，述说，声言。 [7]“故校其目则与古或异”二句：是说考校张苍、耿寿昌等删补的《九章算术》的目录，发现与先秦的《九章算术》有所不同，而使用的都是近代的语言。近语即汉代的语言。

这段话表明，刘徽注尽管是刘徽写的，但含有两种内容，一是“悟其意”者，即他自己的数学创造，二是“采其所见”者，即搜集到的数学知识。

徽幼习《九章》[1]，长再详览。观阴阳之割裂，总筭术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以

敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推[2]，各有攸归，故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。又所析理以辞[3]，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。且筭在六艺[4]，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数[5]，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传[6]，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

刘徽在这里通过“事类相推”，提出了数学之树的重要思想。

刘徽的话高度概括了中国古典数学几何与算术、代数相结合的特点。

[注释]

[1]“徽幼习《九章》”九句：是说我在童年学习过《九章算术》，成年后又做了详细研究。我考察了阴阳的对立，总结了数学的根源，在窥探它的深邃道理之时，便领悟了它的思想。因此，我不揣冒昧，竭尽愚顽，搜集所见到的资料，为它作注。阴阳，中国古代思想家用以解释宇宙万物中两种既对立又互相联系、消长的气或物质势力的术语。数学上互相对立又联系的概念，如法与实、数的大与小、整数与分数、正数与负数、盈与不足、图形的表与里、方与圆等均分属阴阳。算术，今之数学，含有算术、代数、几何、三角等各个分支的内容。最先见之于《周髀算经》卷上陈子语“此皆筭术之所及”。“筭术”即“筭数之术”。赜（zé），幽深玄妙。李籍《音义》云：“赜者，含蓄。含蓄者，探之可及。故《易》曰‘探赜’。” [2]“事类相推”四句：是说各种事物按照它们所属的类别互相推求，分别有自己的归宿。所以它们的枝条虽然分离而具有同一个本干的原因，就在于都来自一个开端。推，

推求，推断。墨家的一种逻辑术语，《墨子·小取》："推也者，以其所不取之同于其所取者予之也。"相当于归纳与演绎两种推理形式相结合的推理方式。攸，助词，所。知训者。李学勤认为，古籍"者"与"之"互训，用为指事之词。而"知"作为语词，则与"之"通。故"知"也可用作指事之词，与"者"义同。 [3]"又所析理以辞"五句：是说如果用言辞表述对数理的分析，用图形表示对立体的分解，那就会使之简约而周密，通达而不烦琐，凡是阅读它的人就能理解其大半的内容。析理，分析数理。析理，初见于《庄子·天下篇》"判天地之美，析万物之理"，到魏晋时期成为正始之音和辩难之风的代名词，始具有方法论的意义。学术界一般认为，"析理"是郭象注《庄子》时概括出来的。实际上，刘徽使用"析理"比郭象早。解体，分解形体。刘徽著有《九章重差图》一卷，已亡佚。黩（dú），频繁，多次。 [4]"且算在六艺"三句：是说算学是六艺之一，古代以它举荐贤能的人而宾礼之，教育贵族子弟。六艺，周代贵族子弟所受教育的六门主要课程：礼、乐、射、御、书、数。《周礼·地官司徒》云"六曰九数"，说明数学已经发展为一门学科。宾兴，周代举贤之法。谓乡大夫自乡小学举荐贤能而宾礼之，以升入国学。郑玄《周礼注》云："兴，犹举也。"国子，公卿大夫的子弟。 [5]"虽曰九数"三句：是说虽然叫作九数，其功用却能穷尽非常细微的领域，探求的范围是没有止境的。方，境，边境。 [6]"至于以法相传"七句：是说至于世代所传的方法，只不过是规矩、度量中那些可以得到并且有共性的东西，并不是特别难以做到的。现在喜欢算学的人很少，所以人世间虽然有许多通才达学，却不一定能对此融会贯通。法指数学方法。规是画圆的工具，矩是画方的工具。相传伏羲女娲造规矩，图 0-1 为山东嘉祥县汉武梁祠画像砖中的女娲伏羲执规矩图。《尸子》说倕作规矩。后来规矩也成了汉语中表示

标准、法则甚至道德规范的常用词。度量，度量衡。用度量衡量度某物，得到其长度、容积和重量，反映事物的数量关系。因此，规矩、度量就是人们常说的空间形式和数量关系。

图 0-1　汉武梁祠女娲伏羲执规矩图

《周官·大司徒》职[1]，夏至日中立八尺之表。其景尺有五寸，谓之地中。说云，南戴日下万五千里。夫云尔者[2]，以术推之。按：《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名[3]，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差、句股[4]，则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城[5]，令高八尺，南北各尽平地，同日度其正中之时。以景差为法[6]，表高乘表间为实，实如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实[7]，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为

法、实是中国古典数学的重要术语，后来开方式即一元方程的一次项也称为法，被开方数和开方式、方程即线性方程组的常数项也称为实。除法的表示从先秦到西汉有一个发展规范的过程。秦汉数

句、股，为之求弦[8]，即日去人也。以径寸之筒南望日[9]，日满筒空，则定筒之长短以为股率，以筒径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也。虽夫圆穹之象犹曰可度[10]，又况泰山之高与江海之广哉？徽以为今之史籍且略举天地之物[11]，考论厥数，载之于志，以阐世术之美，辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于《句股》之下。度高者重表[12]，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之[13]，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子[14]，详而览焉。

[注释]

[1]“《周官·大司徒》职”六句：是说《周官·大司徒》记载，夏至的中午竖立一根高 8 尺的表，若其影长是 1 尺 5 寸，这个地方就称为大地的中心。《周礼注》说：此处到南方太阳直射处的距离是 15 000 里。《周官》即《周礼》，相传周公所作。学术界一般认为是战国时期的作品。职，记，志。表是古代测望用的标杆。景（yǐng），影。《周礼·大司徒》：“以土圭之法，测土深，正日景以求地中。”地中，大地的中心。说，指郑玄《周礼注》的有关内容。南戴日下，夏至日中太阳直射地面之处。 [2]“夫云尔者”七句：是说这样说的理由，是由算法推算出来的。按：《九章算术》“立四表望远”及“因木望山”等问的方法，所测望的目标的某

学简牍表明，先秦除法的表示方式极不统一，张苍等整理《九章算术》时统一了表示方式。

笔者认为《海岛算经》的第 1 问的原型当是泰山。盖此问的海岛去表 102 里 150 步，岛高 4 里 55 步。以 1 魏尺合今 23.8 厘米计算，分别是 43 911 米和 1792.14 米。有人以为这是山东沿海的某岛屿。实际上，不仅山东，就是全中国也没有如此高且距大陆如此近的海岛。而泰山玉皇顶今实测为 1532.8 米，其南偏西方向十分陡峭，今肥城的城官一带海拔仅为 72 米，与玉皇顶之间没有任何障碍物，泰山恰似一海岛，如图 0-4 所示。清阮

点或某方面的数值都是互相显现的，没有像这样遥远渺茫的类型。如此说来，张苍等人所建立的方法还不足以穷尽数学所有的分支。推，计算。立四表望远、因木望山是勾股章的两个题目。端旁，某点或侧面。　[3]“徽寻九数有重差之名”二句：是说我发现九数中有“重差”这一名目，推求其宗旨本原，就是施用于这一类问题的。原，推求本原，推究。指趣，宗旨，意义。　[4]“凡望极高”二句：是说凡是测望极高、极深而同时又要知道它的远近的问题必须用重差、勾股，那么必定以重差形成率，所以叫作重差。重（chóng）差，郑众所说汉代发展起来的数学分支之一，因重表法的基本公式要用到两表影长之差及两表到目的物的距离之差，故名。句股，明清之后作“勾股”，郑众所说汉代发展起来的数学分支之一，张苍等将其编入《九章算术》，并将旁要纳入其中。　[5]“立两表于洛阳之城”四句：是说在洛阳城竖立两根表，高都是8尺，使之呈南北方向，并且都在同一水平地面上。同一天中午测量它们的影子。　[6]“以景差为法”四句：是说以它们的影长之差作为法。以表高乘两表间的距离作为实。实除以法，所得到的结果加表高，就是太阳到地面的距离。如图0-2，记表高为h，南表影长为l_1，北表影长为l_2，日为p，日去地距离PQ为H；南表为AC，影长为$BC = l_1$；北表EG，影长$GF = l_2$，表高AC或EG为h，两表间距$CG = l$，此即重差术求日去地距离的公式$H = \dfrac{lh}{l_2 - l_1} + h$。洛阳，今属河南省。中国古都，东周、东汉等建都于此。法是除数，其本义是标准。《管子·七法》云：“尺寸也，绳墨也，规矩也，衡石也，斗斛也，角量也，谓之法。”除

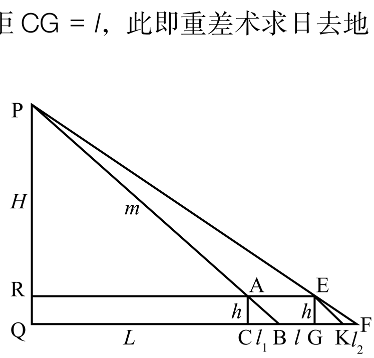


图0-2　重表法

元（1764—1849）曾用重差术测望过泰山，测得泰山高233丈5寸8$\frac{2}{31}$分（裁衣尺），以清裁衣尺1尺35.50厘米计算，为827.36米。刘徽所测与实测之误差比阮元小得多。

法是用同一个标准分割某些东西，这个标准数量就是除数，故称为“法”。乘，其本义是登、升。引申为加其上，进而引申为乘法运算。实是被除数。中国传统数学密切联系实际，被分割的东西，都是实际存在的，故名。实如法而一又作“实如法得一”或“实如法得一尺”（或别的单位），是中国古代表示除法过程的术语，意谓实中如果有与法相等的部分就得一，那么实中有几个与法相等的部分就得几，故名。　[7]“以南表之景乘表间为实”三句：是说以南表的影长乘两表间的距离作为实。实除以法，就是南表到太阳直射处的距离。记南表至太阳直射处的距离 CQ 为 L，则 $L=\frac{ll_2}{l_2-l_1}$。　[8]“为之求弦”二句：是说以勾、股求弦，就是太阳到人的距离。记太阳到人的距离 PB = m，利用勾股术，$m=\sqrt{L^2+H^2}$。　[9]“以径寸之筒南望日”六句：是说用直径 1 寸的竹筒向南测望太阳，让太阳恰好充满竹筒的空间，则以如此确定的竹筒的长度作为股率，以竹筒的直径作为勾率，以太阳到人的距离作为大股，那么与大股相应的勾就是太阳的直径，见图 0-3，记日径为 D，筒径为 d，筒长为 q，由于以筒径和筒长为勾、股的勾股形与以太阳直径和人到太阳距离为勾、股的勾股形相似，根据勾股“相与之势不失本率”的原理得到 $D=\frac{dm}{q}$。[10]“虽夫圆穹之象犹曰可度”二句：是说即使是圆穹的天象都是可以测度的，又何况泰山之高与江海之广呢！泰山，五岳之首，位于山东省泰安东。　[11]“徽以为今之史籍且略举天地之物”八句：是说我认为，当今的史籍尚且略举天地间的事物，考论它们的数量，记载在各种志书中，以阐发人世间方法的美妙，于是我特地撰著《重差》一卷，并

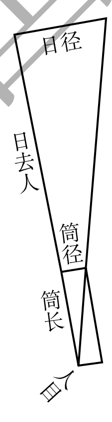


图 0-3　测日径

且为之作注解，以推寻古人的意图，附在《勾股》的后面。志，指各种正史中的志书，主要是“地理志”等篇章。《重差》原为《九章算术注》第十卷，系刘徽自撰自注。南北朝期间单行，因第 1 问为测望一海岛之高、远，故名《海岛算经》，为十部算经之一。今传本是戴震从《永乐大典》辑录出来的，只有 9 问。图及刘徽自注已佚。 [12]“度高者重表”四句：是说测望某目标的高用二根表，测望某目标的深用重叠的矩，对孤立的目标要三次测望，对孤立的而又要求其他数值的目标要四次测望。重表即重表法，是重差术最主要的测望方法。上述测日及《海岛算经》望海岛问都用重表法。累矩即累矩法，是重差术的第二种测望方法，《海岛算经》望深谷问即用此法。此外还有连索法，《海岛算经》望方邑问即用此法。这都是二次测望问题，望松、望楼、望波

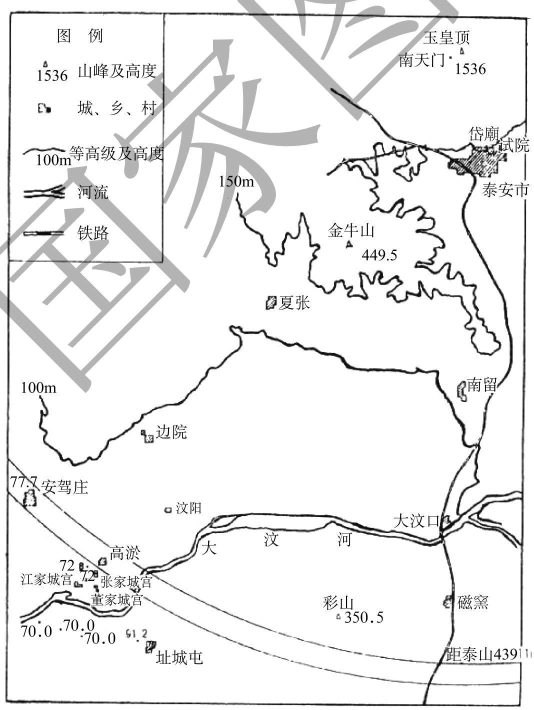


图 0-4 刘徽测泰山示意图

口、望津 4 问是三次测望问题，望清涧、登山临邑 2 问是四次测望问题。　[13]“触类而长之”三句：是说通过类推而不断增长知识，那么，即使是深远而隐秘不露，没有不契合的。“触类而长（zhǎng）”引自《周易·系辞上》。幽，深。遐，远。诡伏，奇异而隐秘不露。靡，无、没有。入，合、契合。　[14]“博物君子”二句：是说博学多识的君子，请仔细地阅读吧！博物，通晓众物。

［点评］

刘徽《九章算术序》分为两部分，第一部分是为《九章算术》而写，第二部分实际上是《重差序》。前者论述了数学的起源、《九章算术》的编纂，并概述自己注《九章算术》的过程，阐发了数学之树的思想和中国古典数学的特点。后者论述了重差术的主要方法。历史上常有这样的情形，后人对一位杰出人物最推崇的往往不是本人最得意的贡献。对掌握了微积分的现代人来说，最赞赏刘徽的是他走到了微积分学大门口的极限思想和无穷小分割方法。而刘徽本人最得意的成就却是重差术，以致谈重差术的部分占整个《九章算术序》的一半以上。不过，尽管重差术把中国古典数学的测望技术发展到西方数学传入中国之前相当完备的程度，但毕竟还属于初等数学的范畴。

卷一[1] 方田[2] 以御田畴界域[3]

今有田广十五步，从十六步。问：为田几何[4]？

答曰：一亩[5]。

又有田广十二步，从十四步。问：为田几何？

答曰：一百六十八步[6]。图[7]：从十四，广十二。

方田术曰：广从步数相乘得积步[8]。此积谓田

值得注意的是，刘徽对方田术没有试图证明，显然是当作公理使用的。

幂是一个重要数学术语，在中国古典数学中表示面积、体积等，又分别称为平幂和立幂。清末李善兰、华衡芳等翻译西方数学著作，用“幂”表示指数，从而改变了“幂”的意义，沿用至今。

李淳风等由刘徽注看不出幂和积的区别，说明他们的逻辑水平低下。

幂[9]。凡广从相乘谓之幂。臣淳风等谨按：经云“广从相乘得积步”[10]，注云“广从相乘谓之幂”，观斯注意，积幂义同。以理推之，固当不尔。何则？幂是方面单布之名，积乃众数聚居之称。循名责实，二者全殊。虽欲同之，窃恐不可。今以凡言幂者据广从之一方；其言积者举众步之都数。经云相乘得积步，即是都数之明文。注云谓之为幂，全乖积步之本意。此注前云积为田幂，于理得通。复云谓之为幂，繁而不当。今者注释存善去非，略为料简，遗诸后学。以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷[11]。臣淳风等谨按：此为篇端，故特举顷、亩二法。余术不复言者，从此可知。按：一亩田，广十五步，从而疏之[12]，令为十五行，即每行广一步而从十六步。又横而截之，令为十六行，即每行广一步而从十五步。此即从疏横截之步，各自为方。凡有二百四十步，为一亩之地，步数正同。以此言之，即广从相乘得积步，验矣。二百四十步者，亩法也；百亩者，顷法也。故以除之，即得。

今有田广一里[13]，从一里。问：为田几何？

答曰：三顷七十五亩[14]。

又有田广二里，从三里。问：为田几何？

答曰：二十二顷五十亩。

里田术曰[15]：广从里数相乘得积里。以三百七十五乘之，即亩数。按：此术广从里数相乘得积里。故[16]方里之中有三顷七十五亩，故以乘之，即得亩数也。

[注释]

[1]“魏刘徽注”（南宋本）：戴震辑录校勘本及四库本、聚珍版作“晋刘徽注”。含有《九章算术》卷四的《永乐大典》卷一六三四四没有标注“晋”，南宋本及影钞本汲古阁本标注为“魏”，但戴震做辑录校勘本时尚未看到。因此，“晋”当是戴震考证所得。　[2] 方田：九数之一。方田章讨论各种面积问题和分数四则运算。狭义的方田，后来又称为直田，即长方形的田，如图 1-1 所示。李籍《音义》云：“田者，围周之以为疆，横从之以为理，平夷著建，兴作利养之地也。方田者，田之正也。诸田不等，以方为正，故曰方田。”　[3] 御的本义是驾驭马车，引申为处理，治理。李籍《音义》云：“御，理也。”畴：已经耕作的田地。李籍引《说文解字》：“畴，耕治之田也。”界域：李籍云：“疆也。”　[4] 今：表示假设，相当于若，假如。今有：假设有。广：一般指物体的宽度。李籍《音义》云：广，“阔也”。从（zōng）：又音 zòng，又作衺，今作纵。李籍云：从，“长也”。广、从在中国古代有方向的含义，广指东西的量度，从指南北的量度。广未必小于从，如乘分术的第三道例题。步：古代长度单位，秦汉

图 1-1　直田

1 步为 6 尺。唐之后 1 步为 5 尺。几何：若干，多少。李籍云："几何，数之疑也。"明末利玛窦与徐光启合译欧几里得的 *Element*，定名为《几何原本》，"几何"实际上是拉丁文 mathematica 的中译，指整个数学。后日本将 geometria 译作几何学，传到中国，几何遂成为数学中关于空间形式的学问。 [5] 荅：本是小豆之名，对问之荅原作"畣"，后来借为荅，后又作答。亩：古代的土地面积单位。 [6] 此处"步"为步 ^{2}。以下凡步、丈、尺、寸、分、厘、毫等单位是表示长度还是面积、体积，从上下文自可判断。 [7] 此"图"当在刘徽所撰《九章重差图》中，已亡佚。 [8] 记方田的面积为 S，广、从分别是 a，b，此长方形的面积公式 $S = ab$。积步是《九章算术》提出的表示面积的概念，也可以作为面积的单位，即步之积。古代之步，视不同情况，有时指今之步，有时指步 ^{2}。下文中之积尺、积寸、积里等概念与此类似。由此又引申出积分等概念。 [9]"此积谓田幂"二句：是说这种积叫作田的幂。凡是广与纵的步数相乘，就叫它作幂。刘徽在这里提出了幂的定义。幂，今之面积。王莽铜斛铭文中始使用，作"冥"。根据不同的情况，刘徽《九章算术注》中有田幂、矩幂、勾幂、股幂、弦幂、方幂、圆幂、立幂等，还有以颜色表示的青幂、朱幂、黄幂等。刘徽将"广从相乘"这种积称为幂，幂与积是种属关系，积包括幂，但积不一定是幂，因为三数相乘的体积，或更多的数相乘，也是积。 [10]"经云'广从相乘得积步'"二十六句：是说《九章算术》说广纵步数相乘，便得到积步。刘徽注说广纵相乘，就把它叫作幂。考察这个注的意思，积和幂的意义相同。按道理推究之，本不应当是这样的。为什么呢？幂是一层四方布的名称，积却是众多的数量积聚的名称。循名责实，二者完全不同。即使想把它看成相同的，我们认为是不可以的。现在凡是说到幂，都是占据有广有纵的一个方形，而说到积，都是列举众多步数的

总数。《九章算术》说相乘得到积步，就是总数的明确文字。刘徽注称它作幂，完全背离了积步的本意。这个注前面说积是田的幂，在道理上可以讲得通。又称它作幂，烦琐而不恰当。现在注释，留下正确的，删去错误的，稍加品评选择，把它贡献给后来的学子。尔：此，这样。殊：不同，异。都：聚，汇集，引申为总，总共。都数：总数。料简：品评选择，亦作“料拣”。自唐起，“料简”常误作“科简”。李淳风等竟然从刘徽的话中得出“积幂义同”的结论，而又认为积与幂完全不同。他们不懂幂属于积，两者有相同之处，说积、幂“二者全殊”，当然都是错误的。他们指责正确的刘徽，徒然暴露其数学水平的低下和逻辑的混乱。 [11] 亩法：1 亩的标准度量。李籍《音义》引《司马法》曰：“六尺为步，步百为亩。秦孝公之制，二百四十步为一亩。”秦汉制度 1 亩＝240 步^2，1 顷 =100 亩。已知某田地的面积的步^{2}数，求亩数，便以 240 步^{2}为除数，故称 240 步^{2}为亩法。除：在《九章算术》及其刘徽注中有二义。一是除去，即现今之“减”。卷六“客去忘持衣”问刘徽注“除”曰：“除，其减也。”一是现今“除法”的除，此处即用此义。李籍释“除”云：“去也。去之使其少”。100 亩为 1 顷，故称为顷法。 [12] 疏：分，截。此处横截与从疏为对文，“疏”即截。 [13] 里：长度单位，秦汉时期 1 里为 300 步。 [14] 三顷七十五亩：1 里^2＝375 亩＝3 顷 75 亩。故 375 亩为里法。 [15] 此为以里为单位的田地的面积求法，其公式与方田术相同。 [16] 故：犹“夫”。

［点评］

此是两道例题与一条抽象性术文，例题中只有题设、答案、没有术文。卷一均如此。

非名数分数的表达方式在先秦极不统一，记分子为 a，分母为 b，有“b 分 a”“b 分之 a”等不同方式，《九章算术》统一为“b 分之 a”。

今有十八分之十二。问：约之得几何[1]？

答曰：三分之二。

又有九十一分之四十九。问：约之得几何？

答曰：十三分之七。

约分按：约分者[2]，物之数量，不可悉全，必以分言之。分之为数，繁则难用。设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔。法实相推[3]，动有参差，故为术者先治诸分。术曰[4]：可半者半之；不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。等数约之，即除也。其所以相减者[5]，皆等数之重叠，故以等数约之。

[注释]

[1] 此处分数的表达“十八分之十二”与今完全一致。约：本义是缠束，引申为精明、简要。李籍《音义》云：“约者，欲其不烦。”这里是约分，即约简分数。　[2]“约分者”四句：是说事物的数量，不可能都是整数，必须以分数表示之。刘徽在这里说明分数产生的最初的原因。悉，全，都。全，整数。言，记载，表示。　[3]“法实相推”三句：是说法与实互相推求，常常有参差不齐的情况，所以探讨计算法则的人首先要研究各种分数

的运算法则。动，往往。参差（cēn cī），长短、高低不齐，大小不等。动有参差，往往会参差不齐。诸分，各种分数运算法则。　[4]“约分术曰”十句：是说约简分数的方法：可以取分子、分母一半的，就取它们的一半；如果不能取它们的一半，就在旁边布置分母、分子的数值，以小减大，辗转相减，求出它们的等数。用等数约简之。可半者即分子、分母都是偶数的情形，可以被 2 除。副置，在旁边布置算筹。李籍《音义》云：“别设筭位，有所分也。”副，贰，次要的。李籍云：副，“敷救切，别也”。置，“陟吏切，设也”。更相，相互。减损：减少。更相减损：辗转相减、相互减损，是一种与辗转相除法异曲同工的运算程序。等，等数，即今之最大公约数的简称，因它是分子、分母更相减损，至两者的余数相等而得出的，故名。以等数约之如刘徽所说以等数同时除分子与分母。　[5]“其所以相减者”三句：是说之所以用它们辗转相减，是因为分子、分母都是等数的重叠。所以用等数约简之。记分母、分子为 a，b，等数为 $r_{n-1}=r_n$，计算每次更相减损的余数 r_i，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n=r_n(q_n+1)$，$r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1}=r_n(q_nq_{n-1}+q_{n-1}+1)$，$r_{n-4}=r_{n-3}q_{n-2}+r_{n-2}=r_n(q_nq_{n-1}q_{n-2}+q_{n-1}q_{n-2}+q_{n-2}+q_n+1)$，$\cdots$，$b=r_nP(q_2, q_3, \cdots, q_n)$，$a=r_nQ(q_1, q_2, \cdots, q_n)$。其中 P，Q 分别是 q_2，q_3，$\cdots$，q_n 与 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的多项式，是整数。因此 a, b 都是 r_n 的倍数。

今有三分之一，五分之二。问：合之得几何[1]？

　　　　答曰：十五分之十一。

又有三分之二，七分之四，九分之五。问：合之得几何？

答曰：得一、六十三分之五十。

又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四。问：合之得几何？

答曰：得二、六十分之四十三。

合分臣淳风等谨按：合分知[2]，数非一端，分无定准，诸分子杂互，群母参差。粗细既殊，理难从一。故齐其众分，同其群母，令可相并，故曰合分。术曰[3]：母互乘子，并以为实。母相乘为法。母互乘子[4]，约而言之者，其分粗；繁而言之者，其分细。虽则粗细有殊，然其实一也。众分错难[5]，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐[6]，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。方以类聚[7]，物以群分。数同类者无远；数异类者无近。远而通体知，虽异位而相从也；近而殊形知，虽同列而相违也。然则齐同之术要矣[8]：错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之[9]，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。其一术者[10]，可令母除为率，率乘子为齐。实如法而一。不满法者[11]，以法命之。今欲求其实，故齐其子，又

率和齐同原理是算法的纲纪，是刘徽非常重要的思想。

同其母，令如母而一。其余以等数约之，即得知。所谓同法为母，实余为子，皆从此例。其母同者[12]，直相从之。

[注释]

[1] 合：聚合，聚集。进而引申为合并，相加。合分，即分数加法的简称。　[2]“合分知”十一句：是说各个分数分母不同，即分数单位不同，无法相加。需要使各分子与分母相齐，使各分母相同，才能相加，所以叫作合分术。齐，使一个数量与其相关的数量同步增长的运算。同，使几组数量中某同类数相同的运算。并，加。　[3] 合分术就是分数加法法则：分母互乘分子，相加作为实。分母相乘作为法。实除以法。亦即设两个分数分别是 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$，则 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$。这里不一定用到分母的最小公倍数。李籍《音义》云：“合分者，欲其不离。”“母互乘子”是使分子与分母相齐，“母相乘”是使诸分母同。　[4]“母互乘子”七句：是说分母互乘分子，约简地表示一个分数，其分数单位大；烦琐地表示一个分数，其分数单位小。虽然单位的大小有差别，然而其实是一个。分数约简后分数单位变大，亦即“约以聚之”。若分子、分母有等数 m，$a=mp$，$b=mq$，则 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$。分子、分母同乘一数，使分数单位变小，亦即“乘以散之”，即 $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$。粗，数值大。细，数值小。　[5]“众分错难”五句：是说各个分数互相错杂难以处理，不将其分数单位化小，就不能会通。通过乘就使分数单位散开，借此使它们互相通达。使它们互相通达就可以相加。　[6]“凡母互乘子谓之齐”七句：是说凡是分母互乘分子，就把它叫作齐；众分母相乘，就把它叫作同。同就是使诸

分数相互通达，有一个共同的分母；齐就是使分子与分母相齐，其态势不会改变本来的数值。在这里刘徽给出了齐、同的定义。势，本义是力量，威力，权力，权势，引申为形势，态势。失，遗失，丧失，丢掉。 [7]“方以类聚”八句：是说各种方法根据各自的种类聚合在一起，天下万物根据各自的性质分离成不同的群体。数只要是同类的就不会相差很远，数只要是异类的就不会很切近。相距很远而能相通者，虽在不同的位置上，却能互相依从；相距很近而有不同的形态，即使在相同的行列上，也会互相背离。方以类聚，物以群分，语出《周易·系辞上》。方，义理，道理。刘徽关于“同类”“异类”的论述，当借鉴自稍前于他的何晏“同类无远而相应，异类无近而不相违”而反其意用之。通体，相似、相通。相从，狭义地指相加，广义地指相协调。 [8]“然则齐同之术要矣”五句：是说那么齐同之术是非常关键的：不管多么错综复杂的度量、数值，只要运用它就会和谐，这就好像用佩戴的觿解绳结一样，不论碰到什么问题，没有不能解决的。在数学运算中，“齐”与“同”一般同时运用，称为“齐同术”，今称为“齐同原理”。它最先产生于分数的通分，如分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，通分后化成$\frac{ad}{bd}$，$\frac{bc}{bd}$，就是同其母，齐其子。后来推广到率的运算中。斯，则，就。觿（xī）是古代用以解绳结的角锥。 [9]“乘以散之”四句：是说乘使之散开，约使之聚合，齐同使之互相通达，这难道不是算法的纲纪吗？这三种等量变换本来源于分数运算，刘徽将其推广到“率”的运算中，实际上将“率”看成“筭之纲纪”。纲纪，大纲要领，法度。 [10]“其一术者”三句：是说另一种方法：可以用分母除众分母之积作为率，用率分别乘各分子作为齐。其一术，另一种方法。 [11]“不满法者”二句：是说如果实中有不满法的，就以法为分母命名一个分数。命，命名。 [12]“其母同者”二句：是说如果各个分数的分母相同，就直接相加。直，径直，

直接。从，本义是随从，此处是“加”的意思。

［**点评**］

率和齐同原理是算法的纲纪，是刘徽非常重要的思想。率的概念在中国产生很早，《墨子》《孟子》等先秦典籍中都有接近数学概念的“率”，《周髀算经》《九章算术》和其他秦汉数学典籍使用了不少数学意义的率。刘徽通过齐同原理把“率”看作算法的纲纪，将《九章算术》大部分术文和二百多道例题都归结到率，确实起到提纲挈领的作用。有的地方将率的思想用于中小学数学教材的改革，收到了良好的效果。

今有九分之八，减其五分之一。问：余几何？

答曰：四十五分之三十一。

又有四分之三，减其三分之一。问：余几何？

答曰：十二分之五。

减分臣淳风等谨按：诸分子、母数各不同，以少减多，欲知余几，减余为实，故曰减分。术曰[1]：母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一。“母互乘子”知[2]，以齐其子也，“以少减多”知，齐故可相减也。“母相乘为法”者，同其母。母同子齐，故如母而一，即得。

今有八分之五，二十五分之十六。问：孰多[3]？多几何？

答曰：二十五分之十六多，多二百分之三。

又有九分之八，七分之六。问：孰多？多几何？

答曰：九分之八多，多六十三分之二。

又有二十一分之八，五十分之十七。问：孰多？多几何？

答曰：二十一分之八多，多一千五十分之四十三。

课分臣淳风等谨按：分各异名，理不齐一，校其相多之数，故曰课分也。术曰[4]：母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一，即相多也。臣淳风等谨按：此术母互乘子，以少分减多分。按：此术多与减分义同。唯相多之数，意共减分有异：减分知，求其余数有几；课分知，以其余数相多也[5]。

[注释]

[1] 减分术是分数减法法则。"减分术曰"六句：是说分母互乘分子，以小减大，余数作为实。分母相乘作为法。实除以法。

亦即$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，则$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$。减：《说文解字》与李籍《音义》均云“减，损也”。减分：将分数相减。李籍云“减分者，欲知其余”。　[2]“‘母互乘子’知”九句：是说“分母互乘分子”，是为了使它们的分子相齐；“以小减大”，是因为分子已经相齐，故可以相减。“分母相乘作为法”，是为了使它们的分母相同。分母相同，分子相齐，所以相减的余数除以分母，即得结果。这是刘徽以齐同原理理解减分术。　[3] 孰：哪个。[4] 课分术：比较分数大小的方法。其程序与减分术基本相同。明代的著作常归结为同一术，或称为减分术，或称为课分术。课：考察，考核。李籍《音义》云：课，“校也”。课分：考察分数的大小。李籍云：“欲知其相多。”　[5] 李淳风等指出减分术与课分术的区别是：前者是求余数是多少，后者是将余数看作相多的数。

［点评］

减分术与课分术的程序相同，所以刘徽没有为课分术作注。明代的数学著作常将其归结为同一术，或称为减分术，或称为课分术。

今有三分之一，三分之二，四分之三。问：减多益少[1]，各几何而平？

答曰：减四分之三者二，三分之二者一，并，以益三分之一，而各平于十二分之七[2]。

这种方法在宋元时期发展为处理分式运算的方式，称为“寄母”。

又有二分之一，三分之二，四分之三。问：减多益

少，各几何而平？

　　荅曰：减三分之二者一，四分之三者四，并，以益二分之一，而各平于三十六分之二十三。

平分臣淳风等谨按：平分知，诸分参差，欲令齐等，减彼之多，增此之少，故曰平分也。术曰[3]：母互乘子[4]，齐其子也。副并为平实[5]。臣淳风等谨按：母互乘子，副并为平实知，定此平实主限，众子所当损益知，限为平。母相乘为法[6]。“母相乘为法”知，亦齐其子，又同其母。以列数乘未并者各自为列实[7]。亦以列数乘法。此当副置列数除平实[8]，若然则重有分，故反以列数乘同齐。臣淳风等谨又按：问云所平之分多少不定，或三或二，列位无常。平三知，置位三重；平二知，置位二重。凡此之例，一准平分不可预定多少，故直云列数而已[9]。以平实减列实[10]，余，约之为所减。并所减以益于少。以法命平实，各得其平。

这里仍称为“法”，是因为此位置为“法”，是位值制的一种表示。位值制是中国古典数学的一个突出特点。

[注释]

[1]“减多益少”二句：是说减大的数，加到小的数上，各多少而得到它们的平均值？益，增加。平，平均值。李籍《音义》云：

“均也。” [2] 此处“二”“一”均是以十二为分母的分数的分子。这是说从$\frac{3}{4}$减$\frac{2}{12}$，从$\frac{2}{3}$减$\frac{1}{12}$，将$\frac{2}{12}+\frac{1}{12}$加到$\frac{1}{3}$上，得到它们的平均值。下问同此。 [3] 平分：求几个分数的平均值。李籍《音义》云：“平分者，欲减多增少，而至于均。”平分术：求几个分数的平均值的方法。以求三个分数$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{e}{f}$的平均值为例。列数是 3。 [4]“母互乘子”一句及其刘徽注一句：是说分母互乘分子，分别得 adf,bcf,bde。刘徽说这是为了使它们的分子相齐。 [5]“副并为平实”一句及其李淳风等注释六句：是说在旁边将它们相加得 $adf+bcf+bde$ 作为平实。李淳风等说：这是为了确立这个平实作为主要的界限。各个分子所应当减损的、增益的，以这个界限作为标准。 [6] “母相乘为法”一句及其刘徽注三句：是说分母相乘 bdf 作为法。刘徽说，既然已使它们的分子相齐，那也应该使它们的分母相同。 [7] “以列数乘未并者”二句：是说以列数乘相齐后还没有相加的分子，得列实 $3adf$，$3bcf$，$3bde$。又以列数乘法，得 $3bdf$。 [8] 刘徽是说，本来用列数先除平实，再用法除即可。但是如此可能出现重有分，所以反过来，用列数乘同，得 $3bdf$，又用列数乘齐，得 $3adf$，$3bcf$，$3bde$。重有分，即今之繁分数。同指术文中的法。齐指术文中的“未并者”。 [9] 直：只，只是，仅。 [10] “以平实减列实”六句：是说以平实减列实，得 $3adf-(adf+bcf+bde)$，$3bcf-(adf+bcf+bde)$，$3bde-(adf+bcf+bde)$。用法 $3bdf$ 与其余数约简，作为应该从大的数中减去的分子。将应该减去的分子相加，增益到小的分子上。用法除平实，便得到各分数的平均值，即$\frac{adf+bcf+bde}{3bdf}$。法，指列数与原“法”之积 $3bdf$。

今有七人，分八钱三分钱之一。问：人得几何？

答曰：人得一钱二十一分钱之四。

又有三人三分人之一，分六钱三分钱之一、四分钱之三。问：人得几何？

答曰：人得二钱八分钱之一。

经分臣淳风等谨按：经分者[1]，自合分已下，皆与诸分相齐，此乃直求一人之分。以人数分所分，故曰经分也。术曰[2]：以人数为法，钱数为实，实如法而一。有分者通之；母互乘子知[3]，齐其子；母相乘者，同其母；以母通之者，分母乘全内子。乘[4]，散全则为积分，积分则与分子相通之，故可令相从。凡数相与者谓之率[5]。率知，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也。故散分者[6]，必令两分母相乘法实也。重有分者同而通之[7]。又以法分母乘实[8]，实分母乘法。此谓法、实俱有分[9]，故令分母各乘全分内子，又令分母互乘上下。

［注释］

[1]“经分者”六句：是说自合分术起都是使各分数相齐。这里是直接求一人所应分得的部分，所以叫作经分。经，划分，分割。经分的本义是分割分数，也就是分数相除。李籍《音义》引《释名》曰：“经者，径也。”又说：“经分者，欲径求一人之分而

记整数部分为 m，分子为 a，分母为 b，在先秦带分数名数（设为钱）分数的表示有 m 钱 b 分 a，m 钱分 a，m 钱 b 分之 a，m 钱 b 分钱 a，m 钱有 b 分钱之 a，m 钱 b 分钱之 a 等不同的表示方式，《九章算术》则统统表示成 m 钱 b 分钱之 a，并且一直沿用到清末。

刘徽在运算中经常使用相与率，它在某种意义上弥补了中国古算中没有明确的互素概念的不足。

20 世纪 80 年代以前，学术界普遍认为分数除法的颠倒相乘法是刘徽的创造，实际上汉简《算数书》启从条就使用了。

至于径。”与李淳风等的说法不同。《算数书》作“径分”。　[2] 经分术，即分数除法法则：以人数作为法，钱数作为实，实除以法。如果有分数，就将其通分。其法则是 $\frac{a}{b} \div d = \frac{a}{b} \div \frac{bd}{b} = \frac{a}{bd}$。[3]“母互乘子知”六句：是说分母互乘分子，是为了使它们的分子相齐；分母相乘，是为了使它们的分母相同；用分母将其通分，使用分母乘整数部分再纳入分子，化成假分数。内（nà），交入，纳入，后作“纳”。　[4]“乘”四句：是说以分母乘整数部分，就将其散开成为积分。积分便与分子相通达，所以可以使它们相加。全，整数。积分，即分之积，与“积步”“积里”“积尺”等术语同类。　[5]“凡数相与者谓之率”七句：是说凡是互相关联的数量，就把它们叫作率。率，本来就互相关联通达；如果有分数就可以散开，分数单位重叠就可以约简；用等数除法与实，就得到相与率。相与，相关。自，本来，本是。散，散分。相与率：就是没有等数（公约数）的一组率关系。　[6]“故散分者”二句：是说所以散分就必定使两分母互乘法与实。　[7] 此谓如果是双重分数，就要化成同分母而使它们通达，即 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$。重（chóng）有分：分数除分数的情形，就是繁分数。同而通之：通过使分母相同而使其通达。它与方程章的“通而同之”有区别。　[8] 这是分数除法中的颠倒相乘法 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$。[9] 这里是说法与实都是分数，所以分别用分母乘整数部分纳入分子，又用分母互乘分子、分母。

［点评］

在经分术注中，刘徽提出了“积分”的概念，它与现代数学的积分当然不同，但两者显然有渊源关系，清末李善兰等以此翻译 integral。

刘徽又提出了“率”的定义：“凡数相与者谓之率。”率，最直观的、应用最多的意义是现今之比例、比率。但这不是它的全部，比如方程术刘徽注中的“令每行为率”便不能归结到比率。可以说，现代数学概念中找不到它的同义语。所以 K.Chemla（林力娜）和笔者在中法双语评注本《九章算术》中没有翻译“率”，径直使用汉语拼音“lü”。

今有田广七分步之四，从五分步之三。问：为田几何？

答曰：三十五分步之十二。

又有田广九分步之七，从十一分步之九。问：为田几何？

答曰：十一分步之七。

又有田广五分步之四[1]，从九分步之五。问：为田几何？

答曰：九分步之四。

整数除法中如有“实不满法”的情形是分数产生的第二种方式。

乘分臣淳风等谨按：乘分者，分母相乘为法，子相乘为实，故曰乘分。术曰[2]：母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。凡实不满法者而有母、子之名[3]。若有分，以乘其实而长之，则亦满法，乃为全耳。又以子有所乘[4]，故母当报除。报除者，实

如法而一也。今子相乘则母各当报除，因令分母相乘而连除也。此田有广从[5]，难以广谕。设有问者曰：马二十匹，直金十二斤[6]。今卖马二十匹，三十五人分之，人得几何？荅曰：三十五分斤之十二。其为之也，当如经分术，以十二斤金为实，三十五人为法。设更言马五匹，直金三斤。今卖四匹，七人分之，人得几何？荅曰：人得三十五分斤之十二。其为之也[7]，当齐其金、人之数，皆合初问入于经分矣。然则“分子相乘为实”者，犹齐其金也；“母相乘为法”者，犹齐其人也。同其母为二十，马无事于同，但欲求齐而已[8]。又马五匹[9]，直金三斤，完全之率；分而言之，则为一匹直金五分斤之三。七人卖四马，一人卖七分马之四。金与人交互相生，所从言之异，而计数则三术同归也[10]。

今有田广三步三分步之一，从五步五分步之二。问：为田几何？

　　荅曰：十八步。

又有田广七步四分步之三，从十五步九分步之五。问：为田几何？

　　荅曰：一百二十步九分步之五。

又有田广十八步七分步之五，从二十三步十一分步之六。问：为田几何？

答曰：一亩二百步十一分步之七。

大广田臣淳风等谨按：大广田知，初术直有全步而无余分[11]，次术空有余分而无全步，此术先见全步复有余分，可以广兼三术，故大广。术曰[12]：分母各乘其全[13]，分子从之，"分母各乘其全，分子从之"者，通全步内分子，如此则母、子皆为实矣。相乘为实。分母相乘为法。犹乘分也。实如法而一[14]。今为术广从俱有分，当各自通其分。命母入者，还须出之，故令"分母相乘为法"而连除之。

［**注释**］

[1] 此问是广大于从的情形。中国古代广表示东西方向的长度，从表示南北方向的长度，因此从不一定比广长。 [2] 乘分术与大广田术都是乘法法则。乘分术就是真分数乘法法则：分母相乘作为法，分子相乘作为实，实除以法。设两分数是$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，则$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。 [3]"凡实不满法者"五句：是说凡是实不满法的就有分母、分子的名称。若有分数，通过乘其实而扩大它，则如果满了法，就形成整数部分。亦，假如。 [4]"又以子有所乘"六句：是说又因为分子有所乘，所以在分母上应当回报以除。回报以除，

就是实除以法。如果分子相乘，则应当分别以分母回报以除，因而将分母相乘而连在一起除，即 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=(ac\div b)\div d=ac\div bd$。报，回报，回赠。报除，回报以除。　[5]“此田有广从”二句：是说这里田地有广纵，难以比喻更多的方面。　[6] 直：值，价格。　[7]“其为之也”三句：是说那处理它的方式，应当使金、人的数相齐，都符合开始的问题，而纳入经分术了。入，纳入。　[8] 此是以齐同术解卖马分金的问题。　[9]“又马五匹”七句：是说又：5 匹马值 3 斤金，这是整数之率；若用分数表示之，就是 1 匹马值 $\frac{3}{5}$ 斤金。7 人卖 4 匹马，1 人卖 $\frac{4}{7}$ 匹马。　[10] 三术：指解决此问的经分术、齐同术和乘分术。　[11] 初术：指方田术，此术中的数都是整数。余分：分数部分。次术：指乘分术，此术中的数都是真分数。空：只，仅。见（xiàn）：显露，显现。三术：指方田术、乘分术和大广田术。　[12] 大广田术是名数带分数乘法法则。　[13]“分母各乘其全”二句：是说分母分别乘自己的整数部分，加入分子。刘徽说，这是将整数部分通分，纳入分子。这样，分子、分母都化成为实。　[14] 设两个带分数为 $a+\frac{c}{d}$ 和 $b+\frac{e}{f}$，其中 a，b 分别是两个分数的整数部分。大广田法则就是 $\left(a+\frac{c}{d}\right)\left(b+\frac{e}{f}\right)=\frac{ad+c}{d}\times\frac{bf+e}{f}=\frac{(ad+c)(bf+e)}{df}$。《算数书》的“大广”条提出大广术，与此基本一致。

［**点评**］

秦汉数学简续和《九章算术》都有分数四则运算法则。这在世界各民族文化中是最早的，而以《九章算术》最为完整。

今有圭田广十二步[1]，正从二十一步。问：为田几何？

答曰：一百二十六步。

又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二[2]。问：为田几何？

答曰：二十三步六分步之五。

“以盈补虚”在卷五称为“损广补狭”，在卷九称为“出入相补”，今统称为“出入相补”。

术曰[3]：半广以乘正从。半广知，以盈补虚为直田也[4]。亦可半正从以乘广[5]。按：半广乘从[6]，以取中平之数，故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。

［注释］

[1] 圭：本是古代帝王、诸侯举行隆重仪式所执玉制礼器。李籍《音义》引《白虎通》曰：“圭者，上锐，象物皆生见于上也。”圭田是卿大夫士供祭祀用的田地，应是等腰三角形。李籍云：“圭田者，其形上锐，有如圭然。”此之圭田可以理解为三角形，如图 1-2（1）所示。《夏侯阳算经》“圭田”自注云“三角之田”。正从：后为“正纵”，即高。　[2] 此圭田给出“从”，可见从就是正从。因此，此圭田应是勾股形。　[3] 这是圭田面积公式 $S=\frac{a}{2}\times h$，其中 S,a,h 分别是圭田的面积、广、正从。　[4] 以盈补虚：在卷五刘徽称为“损广补狭”，在卷九称为“出入相补”，今通称为“出入相补”原理。圭田面积的以盈补虚方法如图 1-2（2）所示。　[5] 这是刘徽记载的圭田面积的另一公式 $S=a\times\frac{h}{2}$。其以盈补虚方法如图 1-2（3）所示。　[6] 此是刘徽记载的关于圭田面积公式的推导。将图 1-2（2）、（3）中的Ⅰ，Ⅱ分别移到

Ⅰ′，Ⅱ′处，便将圭田化为直田，由方田术求解。中平：平均。中平之数：平均值。

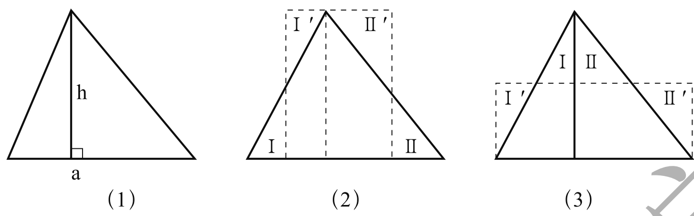


图 1-2　圭田

今有邪田[1]，一头广三十步，一头广四十二步，正从六十四步。问：为田几何？

答曰：九亩一百四十四步。

又有邪田，正广六十五步[2]，一畔从一百步，一畔从七十二步。问：为田几何？

答曰：二十三亩七十步。

术曰[3]：并两邪而半之，以乘正从若广。又可半正从若广[4]，以乘并。亩法而一。并而半之者[5]，以盈补虚也。

今有箕田[6]，舌广二十步，踵广五步，正从三十步。问：为田几何？

答曰：一亩一百三十五步。

又有箕田，舌广一百一十七步，踵广五十步，正从一百三十五步。问：为田几何？

答曰：四十六亩二百三十二步半。

术曰[7]：并踵、舌而半之，以乘正从。亩法而一。中分箕田则为两邪田[8]，故其术相似。又可并踵、舌[9]，半正从以乘之。

［注释］

[1] 邪：斜。邪田：直角梯形。此问之邪田如图 1-3（1）所示。　[2] 正广：直角梯形两直角间的边。畔：边侧。此问之邪田如图 1-3（2）所示。两问之邪田在数学上没有什么不同。　[3] 这里给出邪田面积公式 $S=\dfrac{a_1+a_2}{2}\times h$，其中 S，a_1，a_2，h 分别是邪田的面积、一头广或一畔从、另一头广或一畔从，以及正从或广。两邪：与邪边相邻的两广或两从，此是古汉语中实词活用的修辞方式。若：或，或者。　[4] 刘徽给出邪田面积的另一公式 $S=(a_1+a_2)\times\dfrac{h}{2}$。[5] 证明以上两个公式的以盈补虚方法分别如图 1-3（3）、（4）所示。分别将 Ⅰ 分别移到 Ⅰ′ 处即可。　[6] 箕田：

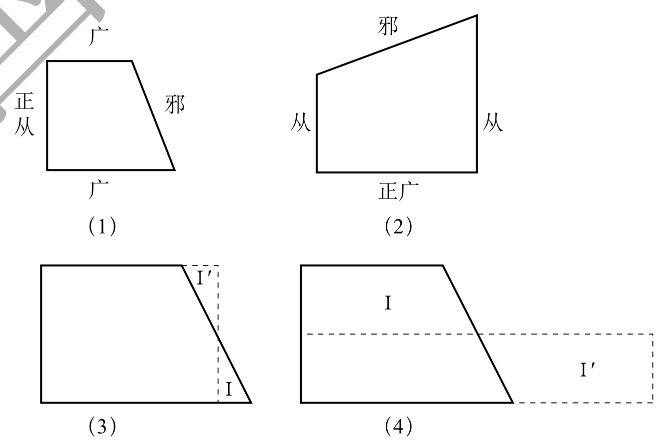
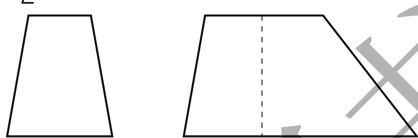


图 1-3　邪田

形如簸箕的田地，即等腰梯形，如图 1-4（1）所示。可理解为一般梯形。李籍《音义》云：“箕田者，有舌有踵，其形哆侈，如有箕然。”箕：簸箕，簸米去糠的器具。踵：脚后跟。舌和踵分别是梯形的上底与下底。　[7] 此给出箕田面积公式 $S=\frac{a_1+a_2}{2}\times h$，其中 S，a_1，a_2，h 分别是箕田的面积、舌、踵和正从，与邪田面积公式相同，见注 [3]。　[8] 箕田分割成两邪田，如图 1-4（2）所示。相似：相类、相像。　[9] 刘徽提出箕田的另一面积公式 $S=(a_1+a_2)\times\frac{h}{2}$，与邪田面积的另一公式相同，见注 [4]。



(1)　(2)

图 1-4　箕田

［点评］

出入相补原理是《九章算术》时代解决面积、体积和勾股问题的基本方法。它基于这样两个事实：一是将一个图形平移或旋转不改变该图形的面积或体积，一是将一个图形分割成若干部分，则所有这些部分的面积或体积的总和等于原图形的面积或体积。

今有圆田，周三十步，径十步 [1]。臣淳风等谨按：术意以周三径一为率，周三十步，合径十步。今依密率 [2]，合径九步十一分步之六。问：为田几何？

答曰：七十五步。此于徽术 [3]，当为田七十一步一百五十七分步之一百三。　臣淳

风等谨依密率，为田七十一步二十二分步之一十三。

又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一。臣淳风等谨按：周三径一，周一百八十一步，径六十步三分步之一。依密率，径五十七步二十二分步之十三。问：为田几何？

答曰：十一亩九十步十二分步之一。此于徽术，当为田十亩二百八步三百一十四分步之一百一十三。臣淳风等谨依密率，为田十亩二百五步八十八分步之八十七。

术曰[4]：半周半径相乘得积步。按：半周为从[5]，半径为广，故广从相乘为积步也。假令圆径二尺，圆中容六觚之一面[6]，与圆径之半，其数均等。合径率一而弧周率三也[7]。又按：为图[8]，以六觚之一面乘一弧半径，三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半径，六之，则得二十四觚之幂。割之弥细[9]，所失弥少。割之又割[10]，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。觚面之外[11]，犹有余径，以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径[12]。表

只有圆内接多边形的边都变成点，才会不可再割。《墨经·经下》：“非半弗斮则不动，说在端。”《墨经·经说下》：“斮半，进前取也。前，则中无为半，犹端也。前后

无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径[13]，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。　此以周、径谓至然之数[14]，非周三径一之率也。周三者，从其六觚之环耳。以推圆规多少之觉，乃弓之与弦也。然世传此法[15]，莫肯精核；学者踵古，习其谬失。不有明据[16]，辩之斯难。凡物类形象[17]，不圆则方。方圆之率，诚著于近，则虽远可知也。由此言之，其用博矣。　谨按图验[18]，更造密率。恐空设法，数昧而难譬，故置诸检括，谨详其记注焉。割六觚以为十二觚术曰[19]：置圆径二尺[20]，半之为一尺，即圆里觚之面也。令半径一尺为弦，半面五寸为句，为之求股：以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸，开方除之，下至秒、忽。又一退法，求其微数。微数无名知以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。以减半径[21]，余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三，谓之小句。觚之半面而又谓之小股。为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之。开方除之，即十二觚之一面也。割十二觚以为二十四觚术曰：亦令半径为弦[22]，半面为

取，则端中也。斱必半；毋与非半，不可斱也。”显然刘徽的割圆会达到“不可割”的境地，与《墨经》的无限分割会达到“不可斱”的端的思想一脉相承。斱（zhuó），破，析，可以理解为割。

此段实际上是刘徽求圆周率程序的序言，他批评了以往学者沿袭周三径一之率的错误，提出要制定求圆周率的法则，详细记注其程序。“不有明据，辩之斯难”，反映了刘徽既敢于创新，又言必有据的精神。但说“物类形象，不圆则方”，把椭圆等形体排除在外，则有局限性。

句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得六百六十九亿八千七百二十九万八千三百六十一忽，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余开方除之，得股九寸六分五厘九毫二秒五忽五分忽之四。以减半径[23]，余三分四厘七秒四忽五分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂六百八十一亿四千八百三十四万九千四百六十六忽，余分弃之。开方除之，即二十四觚之一面也。割二十四觚以为四十八觚术曰：亦令半径为弦[24]，半面为句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得一百七十亿三千七百八万七千三百六十六忽，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分一厘四毫四秒四忽五分忽之四。以减半径[25]，余八厘五毫五秒五忽五分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂一百七十一亿一千二十七万八千八百一十三忽，余分弃之。开方除之，得小弦一寸三分八毫六忽，余分弃之，即四十八觚之一面。以半径一尺乘之[26]，又以二十四乘之，得幂三万一千三百九十三亿四千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四，

即九十六觚之幂也。割四十八觚以为九十六觚术曰：亦令半径为弦[27]，半面为句，为之求股。置次上弦幂，四而一，得四十二亿七千七百五十六万九千七百三忽，余分弃之，则句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九。以减半径[28]，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽，余分弃之。开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽，余分弃之，即九十六觚之一面。以半径一尺乘之[29]，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也。以九十六觚之幂减之[30]，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂。倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田九十六所，谓以弦乘矢之凡幂也。加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出于圆之表矣。故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸以为圆幂之定率而弃其余分。以半径一尺除圆幂[31]，倍所得，六尺二寸八分，即周数。令径自乘为方幂

四百寸[32]，与圆幂相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少。按：弧田图令方中容圆，圆中容方，内方合外方之半。然则圆幂一百五十七，其中容方幂一百也。又令径二尺与周六尺二寸八分相约[33]，周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也。　晋武库中汉时王莽作铜斛[34]，其铭曰：律嘉量斛，内方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂一百六十二寸，深一尺，积一千六百二十寸，容十斗。以此术求之，得幂一百六十一寸有奇，其数相近矣。此术微少。而觚差幂六百二十五分寸之一百五[35]。以一百九十二觚之幂以率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四。置径自乘之方幂四百寸[36]，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千，是为率。方幂五千中容圆幂三千九百二十七；圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四[37]，倍所得，六尺二寸八分二十五分分之八，即周数也。全径二尺与周数通相约，径得

刘徽所称“晋武库”是晋朝之武库，还是晋王之武库，学术界有争论。魏景元四年（263）司马昭称晋公，旋为晋王。笔者倾向于此为晋公或晋王之武库。在魏朝，刘徽可以说晋公或晋王之武库为“晋武库”。若在晋朝，刘徽不当加“晋”字。王莽铜斛在新始建国元年（9）颁行，合斛、斗、升、合、龠为一器。上部为斛，下部为斗，左耳为升，右耳为合、龠。今藏于台北故宫博物院，如图1-9所示，其斛铭是：“律嘉量斛，内方尺而圜其外，庣旁九厘五毫，冥百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗。”与刘徽所述略有不

一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率。若此者，盖尽其纤微矣。举而用之，上法为约耳[38]。当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。

同，而与《隋书·律历志》的记载基本一致。

此段是刘徽求更精确的圆周率近似值 $\frac{3927}{1250}$ 的方法，其精确度已经超过了阿基米德。据严敦杰计算，$l_8 = 4090\frac{612}{1000}$ 寸，$S_9 \approx 314\frac{4}{23}$ 寸^2。

［注释］

[1] 圆田：即圆。当时取“周三径一”之率，即 $\pi = 3$。后来的数学著作常将此率称为“古率”。　[2] 密率：精密之率。密率是个相对概念。此处李淳风等将圆周率近似值 $\frac{22}{7}$ 称作密率，元明以前的数学著作皆如此。盖 $\frac{22}{7}$ 比 3 精确，也比徽率精确。据《隋书·律历志》，祖冲之则将他求出的圆周率近似值 $\frac{355}{113}$ 称作密率，而将 $\frac{22}{7}$ 称作约率。　[3] 徽术：亦称作“徽率”，即下文刘徽所求出的圆周率近似值 $\frac{157}{50}$。　[4] 设 S，L，r 分别是圆的面积、周长和半径，此即圆面积公式 $S = \frac{1}{2}Lr$。　[5] 这是以圆内接正 6 边形的周长代替圆周长，以圆内接正 12 边形的面积代替圆面积的推证方法，大体是：如图 1-5 所示，将圆内接正 12 边形分割成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ及 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 凡 16 部分，使Ⅰ，1 不动，而将Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ及 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 移到Ⅱ′，Ⅲ′，Ⅳ′，Ⅴ′及 2′，3′，4′，5′，6′，7′，8′，9′，10′，11′处，形成一个一个以圆半径为广，正六边形周长的一半为纵的长方形，便得到《九章算术》的圆面积公式。　[6] 觚：多棱角的器物。《史记·酷吏列传》：“破觚而为圆”。n 觚本是正 n 角形，今称正 n 边形。面：边。　[7] 刘徽指出，以上的推证是以周三径一为前提的，因而并没有真正证明《九

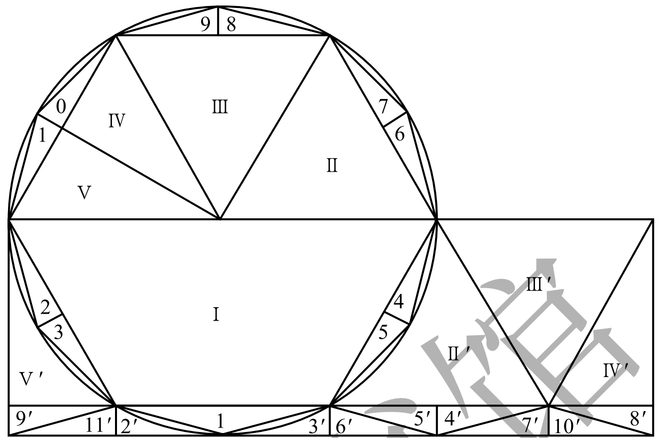
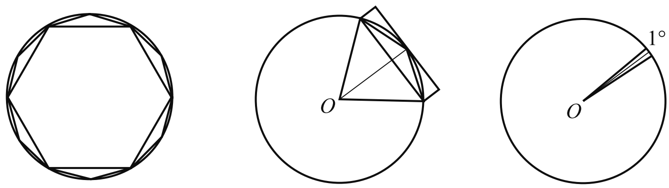


图 1-5 《九章算术》时代圆面积之推导

章算术》的圆面积公式。 [8] 为图：作图。刘徽图已亡佚。设圆内接正6×2^n边形一边长为l_n，正$6\times 2^{n+1}$边形面积为S_{n+1}，n=1，2，3…。“为图”八句：是说圆内接正 12 边形面积为$S_1=3l_0r$，正 24 边形面积为$S_2=6l_1r$。一弧半径、一弧之半径均指圆半径。 [9]“割之弥细”二句：是说将圆内接正 24 边形再割成正 48，96，…边形，那么割的次数越多，它们的边长就越细小。如果把圆内接正多边形的面积当作圆面积，则其缺失越来越少。换言之，$S_n<S$，而S_n-S越来越小。弥的本义是弓张满。引申为满，遍。又引申为加深，更加。弥细，更加细微。失，缺失。弥少，更加少。 [10]“割之又割”三句：是说无限地分割下去，会达到对圆内接多边形不可再割的境地，则圆内接正无穷多边形就与圆周完全重合，圆面积不再有缺失，亦即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，如图 1-6（1）所示。 [11]“觚面之外”四句：是说圆内接正多边形每边与圆周之间都有一余径，将余径乘正多边形的每边之积加到正多边形的面积上，则大于圆面积，即$S_n+6\times 2^n l_n r_n=S_n+2(S_{n+1}-S_n)>S$，其中$r_n$是圆内接正 n 边形的余径，如图 1-6（2）所示。余径：



（1）　　（2）　　（3）

图 1-6　刘徽对圆面积公式的证明

半径剩余的部分，即圆半径与圆内接正多边形的边心距之差。弧表：圆周。［12］至于最细微的觚与圆周合为一体，则不再有余径，亦即 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$。那么余径乘正多边形的每边之积与正多边形的面积之和不再大于圆面积，亦即 $\lim_{n\to\infty}[S_n + 2(S_{n+1} - S_n)] = S$。若夫：至于。［13］“以一面乘半径”三句：是说以与圆周合体的正多边形的一边乘圆半径，再从每个角将其裁开，就成为无穷多个以圆心为顶点，以每边为底的小等腰三角形，那么其面积就是每个小等腰三角形面积的 2 倍。设每个小等腰三角形的面积为 A_i，则 $l_i r = 2A_i$，如图 1-6（3）所示。所有这些小等腰三角形的底边之和为圆周长 $\sum_{i=1}^{\infty} l_i = L$，它们的面积之和为圆面积 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$。因此，$\sum_{i=1}^{\infty} 2A_i = \sum_{i=1}^{\infty} l_i r = Lr = 2S$，反求出 S，就得到 $S = \frac{1}{2}Lr$。辄，总是。［14］“此以周”二句：是说圆周与径的比率是非常精确的圆周率近似值，而不是周三径一。周三是圆内接正 6 边形的周长。它与圆周是弓与弦的关系。六觚之环是圆内接正 6 边形的周长。觉（jiào），“较”之通假字，比较，较量。［15］“然世传此法”四句：是说然而世间相传此法，不追求精确值，学子追随古人，沿袭其谬误。踵的本义是脚后跟，引申为追逐、追随。踵古，追随古人。习，沿袭。习的本义是鸟类频频试飞，引申为学习、沿袭、重复。谬失，错误。［16］“不有明据”二句：是说没有明晰的证据，辩论这个问题是很困难的。［17］“凡物类形象”

四句：是说凡是事物的形象，不是圆的，就是方的。在近处求出方率与圆率，就知道在远处也是同样的，换言之方率与圆率是常数。　[18]“谨按图验”六句：是说谨借助图形作为验证，提出计算精密圆周率值的方法。我担心凭空设立一种方法，数值不清晰而且使人难以通晓，因此把它置于一个法度之中，谨详细地写下这个注释。检括，法则，法度。刘徽的图在《九章重差图》中，早已亡佚。　[19] 分割圆内接正 6 边形为正 12 边形的方法。下面割为 24，48，96 边形的句型不再注。　[20]“置圆径二尺”十六句：是说圆内接正 6 边形的每边长等于半径。考虑由圆内接正 6 边形的边长的一半 AC 作为勾，边心距 OC 作为股，圆半径 OA 作为弦的句股形 OAC。以勾方的面积 25 寸^{2}减弦方的面积，余 75 寸^2。对之开方，求至秒、忽。又再退法，求它的微数。微数中没有名数单位的，就作为分子，以 10 作为分母，约简成 $\frac{2}{5}$ 忽，亦即股 $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{(10\text{寸})^2-(5\text{寸})^2}=866025\frac{2}{5}$忽，如图 1-7 所示。勾方是以勾为边长的正方形的面积，弦方是以弦为边长的正方形的面积。秒、忽都是长度单位。《隋书·律历志》引《孙子算术》曰：“蚕所生吐丝为忽，十忽为秒，十秒为毫，十毫为厘，十厘为分。”李籍《音义》所引与此同，而与南宋本、大典本不同。李籍又云：“忽者，数之始也。”微数，微小的数，这是刘徽创造的求无理根的近似值方法，

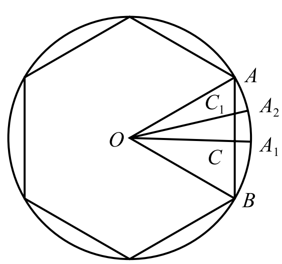


图 1-7　刘徽求圆周率

见卷四开方术刘徽注。 [21]“以减半径”九句：是说求得余径 $CA_1 = OA_1 - OC = 10寸 - 866025\frac{2}{5}忽 = 133974\frac{3}{5}忽$。考虑以余径 CA_1 为勾，其边长之半 AC 为股，12 边形边长 AA_1 为弦的勾股形 A_1AC，$AA_1^2 = AC^2 + CA_1^2 = (5000忽)^2 + \left(133974\frac{3}{5}忽\right)^2 = 267949193445\frac{4}{25}忽^2$，舍去余分 $\frac{4}{25}$，则 $AA_1^2 = 267949193445忽^2$。那么弦 $AA_1 = \sqrt{267949193445}忽$ 就是圆内接正 12 边形的一边长 l_1。万万曰亿。李籍《音义》云：“十万曰亿。万者，物数也。以人之意数为足以胜物数故也。或曰万万曰亿。黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。十等者，谓亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载也。三等者，谓上、中、下之数也。下数者，十十变之。若言：十万曰亿，十亿曰兆,十兆曰京。中数者，万万变之。若言：万万曰亿，万万亿曰兆,万万兆曰京。上数者，数穷则变。若言：万万曰亿，亿亿曰兆,兆兆曰京。《诗》云‘不稼不穑，胡取禾三百亿兮？’毛氏曰：‘万万曰亿。’郑氏曰：‘十万曰亿。’据如此言，则郑用下数，毛用中数也。”数有十等之说，李籍引自东汉末徐岳《数术记遗》。其《诗经》及其毛、郑注，李籍引自北周甄鸾《数术记遗注》。余分，分数部分。 [22]“亦令半径为弦”十一句：是说考虑以圆内接正 12 边形一边长之半 AC_1 为勾，边心距 OC_1 为股，圆半径 OA 为弦的勾股形 OAC_1。勾 AC_1 之幂 $AC_1^2 = \frac{1}{4}AA_1^2 = \frac{1}{4} \times 267949193445忽^2 = 66987298361\frac{1}{4}忽^2$。弃去分数部分 $\frac{1}{4}$，得 $66987298361忽^2$。那么勾股形 OAC_1 的股即正 12 边形的边心距 $OC_1 = \sqrt{OA^2 - AC_1^2} = \sqrt{(10寸)^2 - 66987298361忽^2} = 965925\frac{4}{5}忽$。 [23]“以减半径”九句：是说考虑以圆内接正 12 边形的余径 C_1A_2 为勾，其边长 AA_1 之半 AC_1 为股，正 24 边形一边长 A_2A 为弦的勾股形 A_2AC_1，余径即勾

$A_2C_1 = OA_2 - OC_1 = 10寸 - 965925\frac{4}{5}忽 = 34074\frac{1}{5}忽$。那么弦幂为 $A_2A^2 = AC_1{}^2 + A_2C_1{}^2 = 6698729836忽^2 + (34074\frac{1}{5}忽)^2 = 68148349466\frac{16}{25}忽^2$，弃去分数部分 $\frac{16}{25}$，则弦幂 $A_2A^2 = 68148349466忽^2$。对之开方，得 $A_2A = \sqrt{68148349466}$ 忽，就是圆内接正 24 边形的一边长 l_2。 [24]“亦令半径为弦”十二句：是说考虑以圆内接正 24 边形一边长之半 AC_2 为勾，边心距 OC_2 为股，圆半径 OA 为弦的勾股形 OAC_2。勾 AC_2 之幂 $AC_2{}^2 = \frac{1}{4}A_2A^2 = \frac{1}{4}\times 68148349466忽^2 = 17037087366\frac{1}{2}忽^2$。弃去分数部分，得 $AC_2{}^2 = \frac{1}{4}A_2A^2 = 17037087366忽^2$。则股即正 24 边形的边心距 $OC_2 = \sqrt{OA^2 - AC_2{}^2} = \sqrt{(10寸)^2 - 17037087366忽^2} = 991444\frac{4}{5}忽$。 [25]“以减半径”十一句：是说考虑以圆内接正 24 边形的余径 C_2A_3 为勾，其边长 AA_2 之半 AC_2 为股，正 48 边形一边长 A_3A 为弦的勾股形 A_3AC_2。弦 $A_3A = \sqrt{AC_2{}^2 - C_2A_3{}^2} = \sqrt{17037087366忽^2 + (8555\frac{1}{4}忽)^2} = 130806忽$ 就是圆内接正 48 边形的一边长 l_3。 [26]“以半径一尺乘之”六句：是说圆内接正 96 边形的面积 $S_4 = 48\times\frac{1}{2}l_3r = 48\times\frac{1}{2}\times 130806忽\times 10寸 = 3139344000000忽^2 = 313\frac{584}{625}寸^2$。 [27]“亦令半径为弦”十二句：是说考虑以圆内接正 48 边形一边长之半 AC_3 为勾，边心距 OC_3 为股，圆半径 OA 为弦的勾股形 OAC_3。勾 AC_3 之幂 $AC_3{}^2 = \frac{1}{4}A_3A^2 = 4277569703忽^2$。那么股即正 48 边形的边心距 $OC_3 = \sqrt{OA^2 - AC_3{}^2} = \sqrt{(10寸)^2 - 4277569703忽^2} = 997858\frac{9}{10}$ 忽。 [28]“以减半径”十一句：是说考虑以圆

内接正 48 边形的余径 C_3A_4 为勾，其边长 AA_3 之半 AC_3 为股，正 96 边形一边长 A_4A 为弦的勾股形 A_4AC_3。余径 $C_3A_4 = OA_4 - OC_3 = 10\text{寸} - 997858\frac{9}{10}\text{忽} = 2141\frac{1}{10}\text{忽}$，那么弦 $A_4A = \sqrt{AC_3{}^2 + C_3A_4{}^2} = \sqrt{(4277569703\text{忽})^2 + \left(2141\frac{1}{10}\text{忽}\right)^2} = 65438\text{忽}$，就是圆内接正 96 边形的一边长 l_4。 [29]“以半径一尺乘之”六句：是说圆内接正 192 边形的面积 $S_5 = 96 \times \frac{1}{2} \times 65438\text{忽} \times 10\text{寸} = 3141024000000\text{忽}^2 = 314\frac{64}{625}\text{寸}^2$。 [30]“以九十六觚之幂减之”十一句：是说以圆内接正 96 边形面积减正 192 边形面积 $S_5 - S_4 = 314\frac{64}{625}\text{寸}^2 - 313\frac{584}{625}\text{寸}^2 = \frac{105}{625}\text{寸}^2$ 称为差幂。将其加倍，得 $2(S_5 - S_4) = \frac{210}{625}\text{寸}^2 = 96l_4r_4$，就是正 96 边形之外的 96 块“外弧田”，也就是以弦乘矢的总面积，其中 r_4 是圆内接正 96 边形的余径。将其加到正 96 边形面积上，就大于圆面积，即 $S_4 + 2(S_5 - S_4) = 313\frac{584}{625}\text{寸}^2 + \frac{210}{625}\text{寸}^2 = 314\frac{169}{625}\text{寸}^2 > S$。因此取圆内接正 192 边形面积的整数部分 314 寸 ^{2} 作为圆面积的近似值。凡幂，总面积。定率，确定的率。 [31]“以半径一尺除圆幂”四句：是说以半径 1 尺除圆面积，将结果加倍，得到 6 尺 2 寸 8 分，就是圆周长。实际上是将圆面积近似值 314 寸 ^{2} 代入圆面积公式 $S = \frac{1}{2}Lr$，求出圆周长的近似值。 [32]“令径自乘为方幂”十二句：是说圆的外切正方形与圆的面积之比为 $S_{\text{外}} : S = 200 : 157$，而圆率仍然微少。圆内接一个正方形，则其面积是其外切正方形的 $\frac{1}{2}$，如图 1-8 所示。圆与圆内接正方形的面积之比为 $S : S_{\text{内}} = 157 : 100$。 [33]“又令径二尺与周六尺”五句：是说用圆直径 2 尺与圆周长 6 尺 2 寸 8 分相约，得到 $\pi = L : d = 157 : 50 = \frac{157}{50}$，就是周、径的相与之率。 [34]“晋武库中汉时”十三句：是说晋武库中有西汉末年刘歆为王莽制造的标准量器铜斛（图 1-9）。其

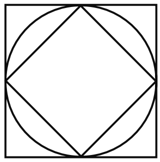


图 1-8 圆与外切大方及内接中方

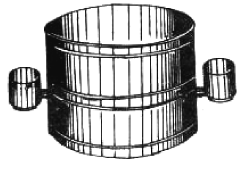
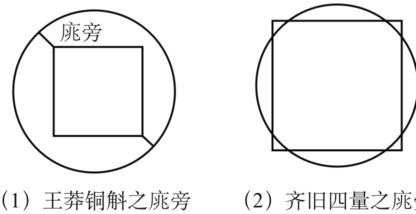


图 1-9 王莽铜斛

铭文说，律嘉量斛的截面是圆形的，内部是一个边长 1 尺的正方形，其庣旁为 9 厘 5 毫，如图 1-10 所示。其面积 162 寸^2，深 1 寸，容积 1620 寸^3，容量 10 斗。以徽术 $\frac{157}{50}$ 计算，铜斛的圆直径为 $d=\sqrt{10^2+10^2}$ 寸 $+2\times 9$ 厘 5 毫 =14 寸 3 厘 3 毫 2 分，底面积为 $\frac{157}{200}\times 14332\text{寸}^2=161\frac{24}{100}\text{寸}^2$，仍少一点。武库，储藏兵器的仓库。律嘉量斛，标准量器中的斛器。律，本是用竹管或金属管制成的定音仪器，后引申为标准、法纪，如乐律、历律、格律、律尺、律吕等。嘉量，古代的标准量器，有鬴、豆、升三量。庣（tiāo），有二义：一指凹下或不满之处。李籍《音义》云："不满之貌也。"如王莽铜斛的庣旁，如图 1-10（1）所示。一指盈余部分，如齐旧四量的庣旁，如图 1-10（2）所示。奇（jī），奇零。李籍云："余数也。" [35]"而觚差幂六百二十五分寸之一百五"六句：是求更准确圆周率值的方法。先求圆面积的近似值：觚差幂，即圆内接正 192 边形与 96 边形的面积之差，为 $S_5-S_4=\frac{105}{625}\text{寸}^2$。以圆内接正 192 边形面积 $314\frac{64}{625}\text{寸}^2$ 作为增减的基础。在其上增加 $\frac{36}{625}\text{寸}^2$，



（1）王莽铜斛之庣旁 （2）齐旧四量之庣旁

图 1-10 庣旁

得到 $S \approx S_5 + \dfrac{36}{625}$ 寸^2 $= 314\dfrac{64}{625}$寸^2 $+ \dfrac{36}{625}$寸^2 $= 314\dfrac{4}{25}$寸^2，作为圆面积近似值。后“以”字训为（wēi）。消息：谓一消一长。$\dfrac{36}{625}$寸^{2}是如何取得的，学术界有不同看法。笔者认为是估值。前已求出 $S_5 - S_4 = \dfrac{105}{625}$寸^2，而 $S - S_4$ 大约是 $S_5 - S_4$ 的 $\dfrac{1}{3}$，即约 $\dfrac{35}{625}$寸^2，如图 1-11 所示。为使最后的结果化简方便，取其为 $\dfrac{36}{625}$寸^2。　[36] 此即刘徽求出的圆分别与外切正方形和内接正方形的面积关系为：$S_{外} : S = 5000 : 3927$，$S : S_{内} = 3927 : 2500$。　[37]“以半径一尺除圆幂”九句：是说将圆面积近似值 $314\dfrac{4}{625}$寸^{2}代入圆面积公式 $S = \dfrac{1}{2}Lr$，求出圆周长的近似值 $L = \dfrac{2S}{r} \approx \left(2 \times 314\dfrac{4}{625}\text{寸}^2\right) \div 10\text{寸} = 6\text{尺}2\text{寸}8\dfrac{8}{25}\text{分}$。用圆直径 2 尺与圆周长近似值相约，得到圆周率 $\pi = \dfrac{L}{d} = \dfrac{3927}{1250}$，相当于 3.1416。　[38]“上法为约耳”六句：是说上法仍不精确，应该计算圆内接正 1536 边形的边长 l_8，正 3072 边形的面积 S_9。舍去奇零部分，得到的数值也是如此，重新验证了 $\dfrac{3927}{1250}$。据严敦杰计算，圆内接正 1536 边形的边长 $l_8 = 4090\dfrac{612}{1000}$ 忽，正 3072 边形的面积 $S_9 \approx 314\dfrac{4}{625}$寸^2。

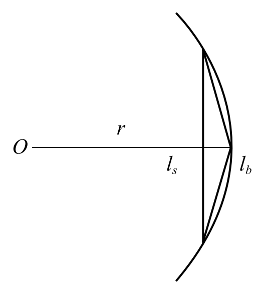


图 1-11　估值

［点评］

使用极限思想和无穷小分割方法对《九章算术》圆面积公式的完整证明，是刘徽割圆术的主旨所在。南朝

大数学家祖冲之应该通晓刘徽割圆术，可惜他的《缀术》因隋唐算学馆“学官莫能究其深奥，是故废而不理”而失传，我们无法窥其全豹。祖冲之之后一千多年间，包括清乾嘉学派专门研究《九章算术》的戴震、李潢等数学家在内，由于他们不懂极限思想和无穷小分割方法，都没有看懂刘徽割圆术。20 世纪 70 年代末以前，所有涉及刘徽割圆术的著述或因特别重视计算圆周率的成就，或因受李潢等人的影响，都有意无意地忽略了“以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂”这几句画龙点睛之语，因此都没有认识到刘徽在证明《九章算术》的圆面积公式，甚至一篇逐字逐句翻译刘徽割圆术的文章对这 25 个字竟略而不译。

刘徽在中国数学史上首创了计算圆周率的完整程序，并求出圆周率近似值$\frac{157}{50}$，相当于 $\pi=3.14$，通常称为徽术或徽率。刘徽取得了与古希腊阿基米德同等的结果，虽然比阿基米德晚，然以不等式 $S_4<S<S_4+2(S_5-S_4)$ 确定圆面积的近似值却比阿基米德简便。

同样，在 20 世纪 70 年代末以前，几乎所有著述由于没有认识到刘徽在证明圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$，将求圆周率的程序统统搞错了。一是它们在求出圆面积的近似值 314 寸^{2}之后，代入现今中学数学教科书中的圆面积公式 $S=\pi r^2$，求出圆周率。这不仅背离了刘徽注，而且会将刘徽置于他从未犯过的循环推理的错误境地。因为刘徽此时并未证明这个圆面积公式，倒是在求出圆周率$\frac{157}{50}$之后，用它修正了与之相当的圆面积公式 $S=\frac{3}{4}d^2$。二是说刘徽用极限过程求得圆周率。实际上刘徽求

圆周率程序没有极限过程，只是极限思想在近似计算中的应用。

臣淳风等谨按：旧术求圆[1]，皆以周三径一为率。若用之求圆周之数，则周少径多。用之求其六觚之田，乃与此率合会耳。何则？假令六觚之田，觚间各一尺为面，自然从角至角，其径二尺可知。此则周六径二，与周三径一已合。恐此犹以难晓[2]，今更引物为喻。设令刻物作圭形者六枚，枚别三面，皆长一尺。攒此六物，悉使锐头向里，则成六觚之周，角径亦皆一尺。更从觚角外畔，围绕为规，则六觚之径尽达规矣。当面径短，不至外规。若以径言之，则为规六尺，径二尺，面径皆一尺。面径股不至外畔，定无二尺可知。故周三径一之率于圆周乃是径多周少。径一周三，理非精密。盖术从简要，举大纲略而言之。刘徽将以为疏[3]，遂乃改张其率。但周、径相乘，数难契合。徽虽出斯二法，终不能究其纤毫也。祖冲之以其不精[4]，就中更推其数。今者修撰，攗摭诸家[5]，考其是非，冲之为密。故显之于徽术之下，冀学者之所裁焉。

李淳风等担心唐最高学府的算学生对周三径一符合圆内接正 6 边形的情形“犹以难晓”，需要如此烦琐地说明，甚至要借助于圭形模型，足见算学馆的学生数学素质之低。

[注释]

[1] 旧术：指《九章算术》时代的周率 3 径率 1。以：训为。

[2]“恐此犹以难晓”十二句：是说我们担心你们还不懂，便以模型展示：取 6 枚边长 1 尺的正三角形的圭，拼成圆内接正 6 边形，它的径达到圆周，而边心距达不到圆周，这才合周三径一。畔，本指田界，引申为界限，边。规，指用圆规画出的圆。　[3]“刘徽将以为疏”六句：是说刘徽认为这粗疏，遂更改其率，但周径相乘，仍不能契合。刘徽虽然提出二法 $\frac{157}{50}$、$\frac{3927}{1250}$，终究不能穷尽其纤毫。将，训则。“二法”，戴震辑录本作“一法”，有的学者认为仅指 $\frac{157}{50}$。至于 $\frac{3927}{1250}$，李潢《九章算术细草图说》认为系祖冲之所创，并说“观下文‘今祖疏’可知”。20 世纪 50 年代学术界还发生了后者到底是谁所创的辩论。实际上《九章算术》三个最古版本，即南宋本、大典本和杨辉本此 3 字均作“今粗疏”，清汲古阁本讹作“今租疏”（可见影钞本也会有讹误！），戴震据此整理微波榭本，又改作“祖”。李潢依据微波榭本，说“祖”是祖冲之，以讹传讹，以至于斯。　[4] 祖冲之（429—500），字文远。南朝宋、齐数学家、天文学家。祖籍范阳遒县（今河北涞水），父、祖均仕南朝。冲之少稽古，有机思，专攻数术。青年时直华林学省（学术机关），后任南徐州（今江苏镇江）从事史、娄县（今江苏昆山）令。入齐，官至长水校尉。注《九章算术》，撰《缀术》，均亡佚。《隋书・律历志》云：“宋末，南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率：圆径七，周二十二。”这相当于 $3.1415926 < \pi < 3.1415627$，密率 $\frac{355}{113}$，约率 $\frac{22}{7}$，领先世界约千年。李淳风等将后者称为密率。祖冲之还制定《大明历》，首先引入岁差，其日月运行周期的数据比以前的历法更为准确。撰《驳议》，不畏权贵，坚持科学真理，反对“虚推古人”。又曾改造指南车、

水碓磨、千里船、木牛流马、欹器，解钟律、博、塞，当时独绝。注《周易》《老子》《庄子》，释《论语》，亦亡佚。又撰《述异记》，今有辑本。严敦杰著《祖冲之科学著作校释》，收录并校释了祖冲之现存全部著作。［5］攈摭（jùn zhí）：摘取，搜集。李籍《音义》云："攈摭，取拾也。攈：或作捃。"是当时还有作"捃"的抄本。

［**点评**］

李淳风等指出祖冲之所求的圆周率比徽率精确是对的。但对刘徽有微词，则不妥。刘徽在中国数学史上首创求圆周率的科学方法，理论意义与实践意义十分重大。祖冲之的方法已失传，一般认为，他使用的是刘徽的方法。钱宝琮指出："李淳风缺少历史发展的认识，有意轻视刘徽割圆术的伟大意义，徒然暴露了他们自己的无知。"李淳风和梁述等都是唐初大数学家，水平尚且如此，遑论其他！这些都反映了封建盛世的隋唐的数学水平远低于魏晋南北朝。

又术曰：周、径相乘，四而一[1]。此周与上弧同耳。周、径相乘各当以半[2]。而今周、径两全，故两母相乘为四，以报除之。于徽术[3]，以五十乘周，一百五十七而一，即径也。以一百五十七乘径，五十而一，即周也。新术径率犹当微少。则据周以求径，则失之长；据径以求周，则失之短。诸据见径以求幂者[4]，皆失之于微少；据周以求幂者，皆失之于微多。

臣淳风等按：依密率[5]，以七乘周，二十二而一，即径；以二十二乘径，七而一，即周。依术求之，即得。

[注释]

[1] 此即圆面积的又一公式$S=\frac{1}{4}Ld$。 [2]“周、径相乘各当以半”四句：是说$r=\frac{1}{2}d$，则$S=\frac{1}{2}Lr=\frac{1}{4}Ld$。 [3] 刘徽指出，以徽术修正的由圆周求直径的公式$d=\frac{50}{157}L$，由圆直径求圆周的公式$L=\frac{157}{50}d$。前者的失误在于稍微大了点。后者的失误在于稍微小了点。[4] 刘徽指出，由径求面积$S=\frac{157}{200}d^2$稍微小了一点，由周长求面积$S=\frac{50}{628}L^2$稍微大了一点。 [5]“依密率”七句为李淳风等用密率$\frac{22}{7}$修正的由圆周求直径的公式$d=\frac{7}{22}L$及由圆直径求圆周的公式$L=\frac{22}{7}d$。

又术曰：径自相乘，三之，四而一[1]。按：圆径自乘为外方[2]。“三之，四而一”者，是为圆居外方四分之三也。若令六觚之一面乘半径[3]，其幂即外方四分之一也。因而三之，即亦居外方四分之三也。是为圆里十二觚之幂耳。取以为圆，失之于微少。于徽新术[4]，当径自乘，又以一百五十七乘之，二百而一。 臣淳风等谨按[5]：密率，令径自乘，以十一乘之，十四而一，即圆幂也。

[注释]

[1] 此即圆面积的第三个公式 $S=\frac{3}{4}d^2$，它对应于周三径一。[2] 这是说，圆面积是其外切正方形面积的 $\frac{3}{4}$。外方即圆的外切正方形，其面积是 d^2。 [3] "若令六觚之一面"五句：是说以圆内接正 12 边形的面积为圆面积，用出入相补原理推证圆田又术。将图 1-12（1）中的圆内接正 12 边形分割成 Ⅰ - Ⅸ，1-9 等 18 份，移到图 1-12（2）中的 Ⅰ′ - Ⅸ′，1′ -9′ 上，恰占满该正方形的 $\frac{3}{4}$。这是刘徽采前人之说记入注中。 [4] 此为刘徽修正的公式 $S=\frac{157}{200}d^2$。[5] 此为李淳风等修正的公式 $S=\frac{11}{14}d^2$。

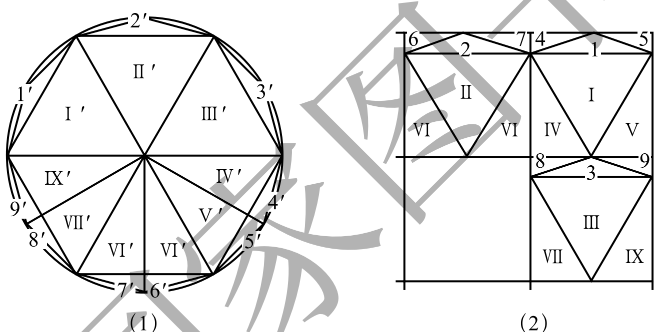


图 1-12 圆田第三术的推导

又术曰：周自相乘，十二而一[1]。六觚之周[2]，其于圆径，三与一也。故六觚之周自相乘为幂，若圆径自乘者九方，九方凡为十二觚者十有二，故曰十二而一，即十二觚之幂也。今此令周自乘[3]，非但若为圆径自乘者九方而已。然则十二而一，所得又非十二觚之类也。若欲以为圆幂，失之于

多矣。以六觚之周，十二而一可也。于徽新术[4]，直令圆周自乘，又以二十五乘之，三百一十四而一，得圆幂。其率：二十五者，圆幂也；三百一十四者，周自乘之幂也。置周数六尺二寸八分，令自乘，得幂三十九万四千三百八十四分。又置圆幂三万一千四百分。皆以一千二百五十六约之，得此率。 臣淳风等谨按：方面自乘即得其积。圆周求其幂，假率乃通。但此术所求用三、一为率。圆田正法，半周及半径以相乘。今乃用全周自乘，故须以十二为母。何者？据全周而求半周，则须以二为法。就全周而求半径，复假六以除之。是二、六相乘，除周自乘之数。依密率[5]，以七乘之，八十八而一。

[注释]

[1] 此即圆面积的又一公式 $S=\frac{1}{12}L^2$，亦对应于周三径一。 [2]“六觚之周”八句：是说圆内接正六边形的周长是圆直径的 3 倍，如图 1-13 所示。以圆直径自乘形成一个正方形（含有 4 个以半径为边长的小正方形），而以圆内接正六边形的边长自乘形成一个大正方形，含有 9 个以直径为边长的正方形。圆内接正 12 边形的面积是圆直径形成的正方形的 $\frac{3}{4}$，因此圆内接正六边形的周长形成的大正方形有 12 个圆内接正 12 边形。1 个正 12 边形的面积恰为大正方形的 $\frac{1}{12}$。这也是刘徽采前人的方法记入注

中。　[3]“今此令周自乘”八句：是说以圆周形成的正方形不只 9 个圆直径形成的正方形。$\frac{1}{12}L^2$ 不是圆内接正 12 边形的面积。如果以 $\frac{1}{12}L^2$ 作为圆面积，失误在于多了一点。圆内接正六边形周长形成的正方形的面积，除以 12，是圆内接正 12 边形的面积，是可以的。三与一，指周三径一之率。非但，不仅、不只。若，乃，就。　[4] 此为刘徽的修正公式 $S=\frac{25}{314}L^2$。其中 $L^2:S=314:25$。盖 $L^2=(628分)^2=394384分^2$，　$S=314寸^2=31400分^2$。以 1256 约简即得。　[5] 此为李淳风等的修正公式 $S=\frac{7}{88}L^2$。

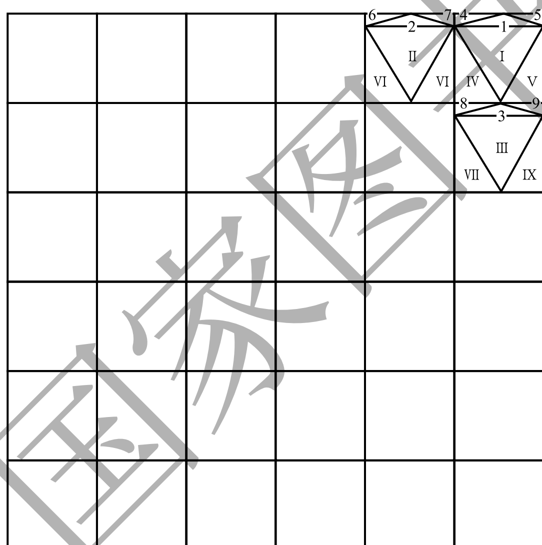


图 1-13　圆田第四术的推导

今有宛田 [1]，下周三十步，径十六步。问：为田几何？

　　答曰：一百二十步。

又有宛田，下周九十九步，径五十一步。问：为

田几何？

答曰：五亩六十二步四分步之一。

术曰[2]：以径乘周，四而一。此术不验[3]。故推方锥以见其形。假令方锥下方六尺，高四尺。四尺为股，下方之半三尺为句。正面邪为弦，弦五尺也。令句、弦相乘，四因之，得六十尺，即方锥四面见者之幂。若令其中容圆锥[4]，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹方幂之与圆幂也。按：方锥下六尺[5]，则方周二十四尺。以五尺乘而半之，则亦方锥之见幂。故求圆锥之数，折径以乘下周之半，即圆锥之幂也。今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣。然其术难用[6]，故略举大较，施之大广田也。求圆锥之幂[7]，犹求圆田之幂也。今用两全相乘，故以为法，除之，亦如圆田矣。开立圆术说圆方诸率甚备，可以验此。

[注释]

[1] 宛田：是类似于球冠的曲面形。其径指宛田表面上穿过顶心的大弧，如图 1-14 所示。李籍《音义》云：“宛田者，中央隆高。《尔雅》曰：‘宛中宛丘。’又曰：‘丘上有丘为宛丘。’皆中央隆高之义也。”元朱世杰《四元玉鉴》的畹田图亦是球冠形。　[2] 此是《九章算术》提出的宛田面积公式 $S=\frac{1}{4}LD$，其中 S，L，D 为宛田的面积、下周和径。　[3]“此术不验”八句：是说宛田术

是错误的。通过计算方锥的体积以显现《九章算术》宛田术不正确。考虑以方锥下方之半为勾，方锥高为股，正面邪为弦构成的勾股形。正面邪即方锥侧面上的高。推，计算。见（xiàn），显现。　[4] 此即刘徽提出的重要原理：$S_{方锥}:S_{圆锥}=4:\pi$，其中$S_{方锥}$,$S_{圆锥}$分别是方锥、圆锥的表面积，如图 1-15 所示。方锥四面见者之幂就是方锥的表面积，圆锥见幂即圆锥的表面积（均不计底面）。　[5]“方锥下六尺”十句：是说圆锥表面积为$\frac{1}{4}LD$，宛田表面圆穹，其积与圆锥表面积取同一形式，是少了。　[6]“然其术难用”三句：是说这一方法难以处置，因此粗略地举出其大概，应用于大的田地。大较，大略，大致。　[7]“求圆锥之幂”二句：是说圆锥表面积的公式与圆面积相同。

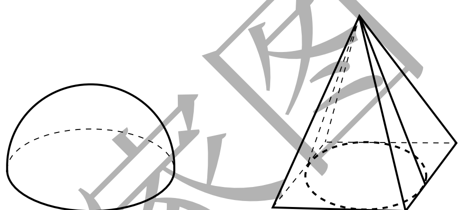


图 1-14　宛田　　图 1-15　圆锥与方锥见幂

［**点评**］

刘徽在宛田术注中指出《九章算术》宛田术“不验”是对的，然而此处的论证并不充分。《九章算术》提出的宛田术与圆锥见幂取同一形式。但由于$D>d$，当然有$\frac{1}{4}LD>\frac{1}{4}Ld$，因而无法判断$\frac{1}{4}LD$比真值小。刘徽在此混淆了 D 与 d，犯了反驳中混淆概念的失误。这是刘徽极为罕见的失误，应该指出。

今有弧田[1]，弦三十步，矢十五步。问：为田

几何?

答曰：一亩九十七步半。

又有弧田，弦七十八步二分步之一，矢十三步九分步之七。问：为田几何?

答曰：二亩一百五十五步八十一分步之五十六。

术曰[2]：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。方中之圆[3]，圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。中方合外方之半，则朱青合外方四分之一也。弧田[4]，半圆之幂也，故依半圆之体而为之术。以弦乘矢而半之则为黄幂，矢自乘而半之为二青幂。青、黄相连为弧体。弧体法当应规。今觚面不至外畔，失之于少矣。圆田旧术以周三径一为率，俱得十二觚之幂，亦失之于少也。与此相似，指验半圆之弧耳。若不满半圆者，益复疏阔。宜依句股锯圆材之术[5]，以弧弦为锯道长，以矢为句深，而求其径。既知圆径[6]，则弧可割分也。割之者，半弧田之弦以为股，其矢为句，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为句，半圆径为弦，为之求股。以减半径，其余即小弦之矢也。割之又割[7]，使至极细。但举弦、矢

许多人说这是一个极限过程，不

相乘之数，则必近密率矣。然于算数差繁[8]，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。

妥。这里说“必近密率”，可见不是极限过程，而是极限思想在近似计算中的应用。

[注释]

[1] 弧田：形如今之弓形，如图 1–16 所示。李籍《音义》云：“弧田者，有弧有矢，如弧之形。” [2] 设 S, c, v 分别是弓形的面积、弦和矢，此即弓形面积公式 $S=\frac{1}{2}\left(cv+v^2\right)$。 [3] “方中之圆”五句：如图 1–17（1）所示，圆内接正方形，其面积是外方的一半。两朱幂、两青幂是圆内接正 12 边形除去中方所剩余的部分，两青幂分别是 *ABCD* 和 *ALKJ*，两朱幂分别是 *DEFG* 和 *GHIJ*。将青幂 *ALKJ* 中的Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ分别移到 *AMDCB* 的Ⅰ′，Ⅱ′，Ⅲ′上，便知一个青幂为外切正方形的 $\frac{1}{8}$。朱幂亦然。两朱幂与两青

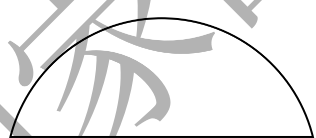
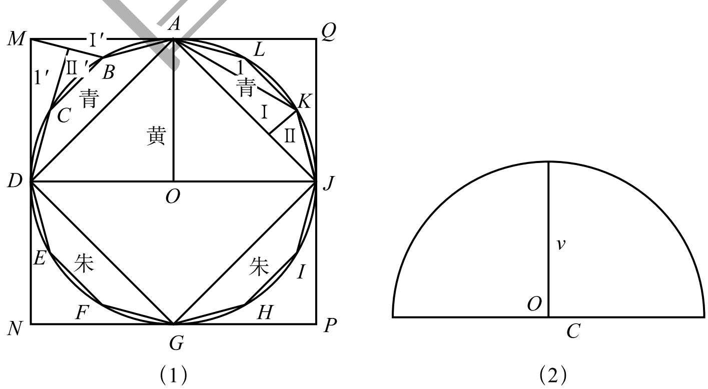


图 1–16　弧田



（1）　　（2）

图 1–17　刘徽之半圆弧田

幂的总面积是外切正方形的$\frac{1}{4}$。　[4]“弧田”十六句：是说半圆也是弧田，故以半圆为例论证《九章算术》弧田术之不准确，见图 1-17（2）。黄幂是弦矢相乘之半，即勾股形 ADJ。矢自乘的一半为两青幂，即勾股形 AMD，亦即 $ABCD$ 与 $ALKJ$ 之和。如果二青幂与黄幂形成半圆 $ABCDJKL$ 的面积$\frac{1}{2}\left(cv+v^2\right)$，那么它们的外边应与半圆弧重合。然而它们的外边达不到半圆弧，因此其面积比半圆小。如果弧田不到半圆，则更加粗疏。　[5]“宜依句股锯圆材之术”四句：是说已知弧田之弦 AB，记为 c，弧田之矢 A_1D，记为 v，根据勾股章的勾股锯圆材之术，弦 AB 相当于锯道长，矢 A_1D 就是锯道深，那么弧田所在的圆直径为 $d=\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2+v^2\right]\div v$，如图 1-18 所示。　[6]“既知圆径”十二句：是说将弧田分割成以弦 AB 为底的等腰三角形 A_1AB，以及分别以 A_1A、A_1B 为弦的两个小弧田。将小弧田 AA_2A_1 再分割成小等腰三角形 A_2AA_1 以及分别以 AA_2、A_2A_1 为弦的两个更小弧田。对小弧田 BA'_2A_1 亦可分割成小等腰三角形 A'_2BA_1 以及分别以 $A_1A'_2$、A'_2B 为弦的两个更小弧田。如此可以继续下去。　[7]“割之又割”四句：是说考虑勾股形 AA_1D，由勾股术，小弧之弦为 $c_1=\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+v^2}$。由勾股形 OA_1D_1，求出股 $OD_1=\sqrt{r^2-\left(\frac{c_1}{2}\right)^2}$。小弦之矢即小弧之矢 $v_1=r-\sqrt{r^2-\left(\frac{c_1}{2}\right)^2}$。上述的分割过程可以继续下去，依次求出 $c_i=\sqrt{\left(\frac{c_{i-1}}{2}\right)^2+{v_{i-1}}^2}$，$v_i=r-\sqrt{r^2-\left(\frac{c_i}{2}\right)^2}$，$i=1，2，3，\cdots，n$。而当 n 足够大时，$S_n=\sum_{k=1}^{n}2^k\times\frac{1}{2}c_kv_k$ 就接近密率了。　[8]“然于筭数差繁”五句：

是说这种数值计算的方法太繁杂，必定要有所寻究，才这样做。如果只是度量田地，取其大概的数，还是用旧的方法简约。差（cī）繁，繁杂。又，次第，等级，见衰分章。

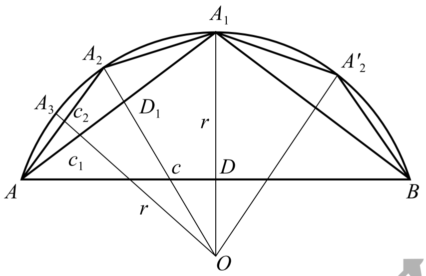


图 1-18　弧田密率

［**点评**］

必欲有所寻究，才要求弧田密率。这种“寻究”无疑是数学家的数学研究，具有纯数学的性质。说明在刘徽的头脑中有明确的纯数学研究与数学的实际应用的区分。

今有环田[1]，中周九十二步，外周一百二十二步，径五步。此欲令与周三径一之率相应，故言径五步也。据中外周[2]，以徽术言之，当径四步一百五十七分步之一百二十二也。　臣淳风等谨按[3]：依密率，合径四步二十二分步之十七。问：为田几何？

答曰：二亩五十五步。于徽术[4]，当为田二亩三十一步一百五十七分步之二十三。　臣淳风等依密率[5]，为田二亩三十步二十二分步之十五。

又有环田，中周六十二步四分步之三，外周一百一十三步二分步之一，径十二步三分步之二。此田环而不通匝[6]，故径十二步三分步之二。若据上周求径者，此径失之于多，过周三径一之率，盖为疏矣。于徽术[7]，当径八步六百二十八分步之五十一。 臣淳风等谨按[8]：依周三径一考之，合径八步二十四分步之一十一。依密率[9]，合径八步一百七十六分步之一十三。问：为田几何？

答曰：四亩一百五十六步四分步之一。于徽术[10]，当为田二亩二百三十二步五千二十四分步之七百八十七也。依周三径一[11]，为田三亩二十五步六十四分步之二十五。 臣淳风等谨按密率[12]，为田二亩二百三十一步一千四百八分步之七百一十七也。

术曰：并中、外周而半之，以径乘之，为积步[13]。此田截而中之周则为长[14]。并而半之知，亦以盈补虚也。此可令中、外周各自为圆田[15]，以中圆减外圆，余则环实也。

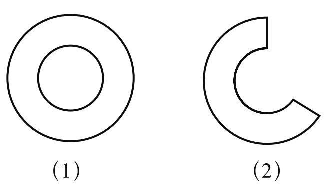
密率术曰[16]：置中、外周步数，分母、子

各居其下。母互乘子，通全步，内分子。以中周减外周，余半之，以益中周。径亦通分内子，以乘周为密实。分母相乘为法。除之为积步，余，积步之分。以亩法除之，即亩数也。按：此术，并中、外周步数于上，分母、子于下。母互乘子者，为中、外周俱有分，故以互乘齐其子。母相乘同其母。子齐母同，故通全步，内分子。“半之”知[17]，以盈补虚，得中平之周。周则为从，径则为广，故广、从相乘而得其积。既合分母，还须分母出之。故令周、径分母相乘而连除之，即得积步。不尽，以等数除之而命分。以亩法除积步，得亩数也。

[注释]

[1] 环田：即今之圆环，如图 1-19（1）所示。李籍《音义》云：“环田者，有肉有好，如环之形。《尔雅》曰：‘肉好若一，谓之环。’或作镮。”是当时还有一部作“镮”的抄本。中周：圆环的内圆之周。外周：圆环的外圆之周。径：中外周之间的距离。　[2] 设圆环之径为 d，构成圆环的内圆周长和半径分别是 L_1，r_1，外圆周长和半径分别是 L_2，r_2，据徽术，圆环之径 $d = r_2 - r_1 = \frac{1}{2}\times\frac{50}{157}(L_2 - L_1) = \frac{50}{314}(122\text{步} - 92\text{步}) = 4\frac{122}{157}\text{步}$。　[3] 李淳风等据密率求出圆环之径 $d = r_2 - r_1 = \frac{1}{2}\times\frac{7}{22}(L_2 - L_1) = \frac{7}{44}(122\text{步} - 92\text{步}) = 4\frac{17}{22}\text{步}$。　[4] 据徽术，其面积

$S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d=\frac{1}{2}(92步+122步)\times 4\frac{122}{157}步=2亩31\frac{23}{157}步^2$ 。[5] 李淳风等依据密率求得面积 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d=\frac{1}{2}(92步+122步)\times 4\frac{15}{22}步=2亩30\frac{15}{22}步^2$ 。 [6] 此问之环田为 240° 的环缺，如图 1-19（2）所示。匝（zā）：周。 [7] 刘徽和李淳风等都将其看成“通匝”的圆环进行计算。刘徽求出 $d=r_2-r_1=\frac{1}{2}\times\frac{50}{157}(L_2-L_1)=\frac{50}{314}\left(113\frac{1}{2}步-62\frac{3}{4}步\right)=8\frac{51}{628}步$。 [8] 李淳风等依周三径一求出 $d=r_2-r_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(L_2-L_1)=\frac{1}{6}\left(113\frac{1}{2}步-62\frac{3}{4}步\right)=8\frac{11}{24}步$。 [9] 李淳风等依密率 $\frac{22}{7}$ 求出 $d=r_2-r_1=\frac{1}{2}\times\frac{7}{22}(L_2-L_1)=\frac{7}{44}\left(113\frac{1}{2}步-62\frac{3}{4}步\right)=8\frac{13}{176}步$。 [10] 刘徽依环田密率术求出面积 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d=\frac{1}{2}\left(62\frac{3}{4}步+113\frac{1}{2}步\right)\times 8\frac{51}{628}步=2亩232\frac{787}{5024}步^2$。 [11] 刘徽依周三径一之率求出 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d=\frac{1}{2}\left(62\frac{3}{4}步+113\frac{1}{2}步\right)\times 8\frac{11}{24}步=3亩25\frac{25}{64}步^2$。 [12] 李淳风等依环田密率术求出 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d=\frac{1}{2}\left(62\frac{3}{4}步+113\frac{1}{2}步\right)\times 8\frac{13}{176}步=2亩231\frac{717}{1408}步^2$。 [13] 此即圆环面积公式 $S=\frac{1}{2}(L_1+L_2)d$ 。 [14]“此田截而中之周则为长”三句：是说将圆环沿环径剪开，展成等腰梯形，如图 1-20 所示。然后如梯形（箕田）那样出入相补。 [15] 这是刘徽提出的圆环的另一面积公式



（1） （2）

图 1-19 圆环

$S = S_2 - S_1 = \frac{1}{2}L_2 r_2 - \frac{1}{2}L_1 r_1$，其中 S_1，S_2 分别是构成圆环的内圆和外圆的面积。　[16] 用现代符号写出，此术同上。它是针对分数的情形而设的，比整数的精密，故称“密率术”。　[17] 中平之周：中周与外周长的平均值。

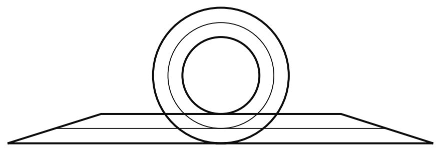


图 1-20　环田展为梯形（采自沈康身《九章算术导读》）

［点评］

方田的本义是面积的计算，起源应该相当早，或可追溯到商和西周。后来产生了分数并逐步完善了分数四则运算法则，成为运算的基础。此时人们没有改变“九数”的格局，而是将其插入方田，从此方田就含有面积计算与分数四则运算法则两类内容。此大约发生在“二郑”所说的“九数”模式化的春秋战国时期。刘徽合分术注发展了《九章算术》率的概念，提出它是“筭之纲纪”。刘徽方田章注最大的贡献是用极限思想和无穷小分割方法证明了《九章算术》的圆面积公式，并由此首创了计算圆周率的科学程序，奠定了中国在圆周率计算方面在世界上领先千余年的基础。

卷二　粟米[1] 以御交质变易[2]

粟米之法[3] 凡此诸率相与大通[4]，其特相求，各如本率。可约者约之。别术然也。

粟率五十	粝米三十[5]
粺米二十七	糳米二十四
御米二十一	小䵂十三半
大䵂五十四	粝饭七十五

粺饭五十四　　　糳饭四十八

御饭四十二　　　菽、荅、麻、麦各四十五

稻六十　　　　　豉六十三

飧九十　　　　　熟菽一百三半

糵一百七十五

今有此都术也[6]。凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。诚能分诡数之纷杂[7]，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。术曰[8]：以所有数乘所求率为实。以所有率为法。少者多之始[9]，一者数之母，故为率者必等之于一。据粟率五、粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。欲化粟为米者，粟当先本是一。一者，谓以五约之，令五而为一也。讫，乃以三乘之，令一而为三。如是，则率至于一，以五为三矣。然先除后乘[10]，或有余分，故术反之。又完言之知[11]，粟五升为粝米三升；分言之知，粟一斗为粝米五分斗之三。以五为母，三为子。以粟求粝米者，以子乘，其母报除也。然则所求之率常为母也。　臣淳风等谨按[12]：宜云“所求之率常为子，所有之率常为母。”今乃云“所求之率

刘徽说“一者数之母”，在有理数范围之内无疑是正确的，但在实数范围内则不尽然。比如，边长为 1 的正方形，其对角线是 $\sqrt{2}$，显然，1 不能说是 $\sqrt{2}$ 之母，因为它们之间没有公度。

可见当时已掌握了乘除法的交换律：$(A \div a) \times b = (A \times b) \div a$。

常为母”知，脱错也。实如法而一。

今有粟一斗，欲为粝米。问：得几何？

答曰：为粝米六升。

术曰：以粟求粝米，三之[13]，五而一。臣淳风等谨按：都术，以所求率乘所有数，以所有率为法。此术以粟求米，故粟为所有数。三是米率，故三为所求率。五为粟率，故五为所有率。粟率五十，米率三十，退位求之，故唯云三、五也。

今有粟二斗一升，欲为粺米。问：得几何？

答曰：为粺米一斗一升五十分升之十七。

术曰：以粟求粺米，二十七之，五十而一。臣淳风等谨按：粺米之率二十有七，故直以二十七之，五十而一也。

今有粟四斗五升，欲为糳米。问：得几何？

答曰：为糳米二斗一升五分升之三。

术曰：以粟求糳米，十二之[14]，二十五而一。臣淳风等谨按：糳米之率二十有四，以为率太繁，故因而半之，故半所求之率，以乘所有之数。所求之率既减半，所有之率亦减半。是故十二乘之，二十五而一也。

今有粟七斗九升，欲为御米。问：得几何？

答曰：为御米三斗三升五十分升之九。

术曰：以粟求御米，二十一之，五十而一。

今有粟一斗，欲为小䵂。问：得几何？

答曰：为小䵂二升一十分升之七。

术曰：以粟求小䵂，二十七之[15]，百而一。臣淳风等谨按：小䵂之率十三有半。半者二为母，以二通之，得二十七，为所求率。又以母二通其粟率，得一百，为所有率。凡本率有分者，须即乘除也。他皆放此。

今有粟九斗八升，欲为大䵂。问：得几何？

答曰：为大䵂一十斗五升二十五分升之二十一。

术曰：以粟求大䵂，二十七之，二十五而一。臣淳风等谨按：大䵂之率五十有四，其可半，故二十七之，亦如粟求糳米，半其二率。

今有粟二斗三升，欲为粝饭。问：得几何？

答曰：为粝饭三斗四升半。

术曰：以粟求粝饭，三之[16]，二而一。臣淳风等谨按：粝饭之率七十有五。粟求粝饭，合以此数乘之。今以等数二十有五约其二率，所求之率得三，所有之率得二，故以三乘二除。

今有粟三斗六升，欲为粺饭。问：得几何？

答曰：为粺饭三斗八升二十五分升之二十二。

术曰：以粟求粺饭，二十七之，二十五而一。

臣淳风等谨按：此术与大䵂多同。

今有粟八斗六升，欲为糳饭。问：得几何？

答曰：为糳饭八斗二升二十五分升之一十四。

术曰：以粟求糳饭，二十四之，二十五而一。

臣淳风等谨按：糳饭率四十八。此亦半二率而乘除。

今有粟九斗八升，欲为御饭。问：得几何？

答曰：为御饭八斗二升二十五分升之八。

术曰：以粟求御饭，二十一之，二十五而一。

臣淳风等谨按：此术半率，亦与糳饭多同。

今有粟三斗少半升[17]，欲为菽。问：得几何？

答曰：为菽二斗七升一十分升之三。

今有粟四斗一升太半升[18]，欲为荅。问：得几何？

答曰：为荅三斗七升半。

今有粟五斗太半升，欲为麻。问：得几何？

答曰：为麻四斗五升五分升之三。

今有粟一十斗八升五分升之二，欲为麦。问：得几何？

答曰：为麦九斗七升二十五分升之一十四。

术曰：以粟求菽、荅、麻、麦，皆九之[19]，十而一。臣淳风等谨按：四术率并四十五，皆是为粟所求，俱合以此率乘其本粟。术欲从省，先以等数五约之，所求之率得九，所有之率得十。故九乘十除，义由于此。

今有粟七斗五升七分升之四，欲为稻。问：得几何？

答曰：为稻九斗三十五分升之二十四。

术曰：以粟求稻，六之，五而一。臣淳风等谨按：稻率六十，亦约二率而乘除。

今有粟七斗八升，欲为豉。问：得几何？

答曰：为豉九斗八升二十五分升之七。

术曰：以粟求豉，六十三之，五十而一。

今有粟五斗五升，欲为飧。问：得几何？

答曰：为飧九斗九升。

术曰：以粟求飧，九之，五而一。臣淳风等谨按：飧率九十，退位，与求稻多同。

今有粟四斗，欲为熟菽。问：得几何？

答曰：为熟菽八斗二升五分升之四。

术曰：以粟求熟菽，二百七之，百而一。臣淳风等谨按：熟菽之率一百三半。半者其母二，故以母二通之。所求之率既被二乘，所有之率随而俱长，故以二百七之，百而一。

今有粟二斗，欲为蘖。问：得几何？

答曰：为蘖七斗。

术曰：以粟求蘖，七之[20]，二而一。臣淳风等谨按：蘖率一百七十有五，合以此数乘其本粟。术欲从省，先以等数二十五约之，所求之率得七，所有之率得二。故七乘二除。

今有粝米十五斗五升五分升之二，欲为粟。问：得几何？

答曰：为粟二十五斗九升。

术曰：以粝米求粟，五之，三而一。臣淳风等谨按：上术以粟求米，故粟为所有数，三为所求率，五为所有率。今此以米求粟，故米为所有数，五为所求率，三为所有率。准都术求之[21]，各合其数。以下所有反求多同，皆准此[22]。

今有粺米二斗，欲为粟。问：得几何？

答曰：为粟三斗七升二十七分升之一。

术曰：以粺米求粟，五十之，二十七而一。

今有糳米三斗少半升，欲为粟。问：得几何？

答曰：为粟六斗三升三十六分升之七。

术曰：以糳米求粟，二十五之[23]，十二而一。

今有御米十四斗，欲为粟。问：得几何？

答曰：为粟三十三斗三升少半升。

术曰：以御米求粟，五十之，二十一而一。

今有稻一十二斗六升一十五分升之一十四，欲为粟。问：得几何？

答曰：为粟一十斗五升九分升之七。

术曰：以稻求粟，五之，六而一。

今有粝米一十九斗二升七分升之一，欲为粺米。问：得几何？

答曰：为粺米一十七斗二升一十四分升之一十三。

术曰：以粝米求粺米，九之[24]，十而一。臣淳风等谨按：粺率二十七，合以此数乘粝米。术欲从省，先以等数三约之，所求之率得九，所有之率得十，

故九乘而十除。

今有粝米六斗四升五分升之三，欲为粝饭。问：得几何？

答曰：为粝饭一十六斗一升半。

术曰：以粝米求粝饭，五之[25]，二而一。臣淳风等谨按：粝饭之率七十有五，宜以本粝米乘此率数。术欲从省，先以等数十五约之，所求之率得五，所有之率得二。故五乘二除，义由于此。

今有粝饭七斗六升七分升之四，欲为飧。问：得几何？

答曰：为飧九斗一升三十五分升之三十一。

术曰：以粝饭求飧，六之，五而一。臣淳风等谨按：飧率九十，为粝饭所求，宜以粝饭乘此率。术欲从省，先以等数十五约之，所求之率得六，所有之率得五。以此故六乘五除也。

今有菽一斗，欲为熟菽。问：得几何？

答曰：为熟菽二斗三升。

术曰：以菽求熟菽，二十三之[26]，十而一。臣淳风等谨按：熟菽之率一百三半。因其有半，各以

母二通之，宜以菽数乘此率。术欲从省[27]，先以等数九约之，所求之率得一十一半，所有之率得五也。

今有菽二斗，欲为豉。问：得几何？

答曰：为豉二斗八升。

术曰：以菽求豉，七之[28]，五而一。臣淳风等谨按：豉率六十三，为菽所求，宜以菽乘此率。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得七，而所有之率得五也。

今有麦八斗六升七分升之三，欲为小䵂。问：得几何？

答曰：为小䵂二斗五升一十四分升之一十三。

术曰：以麦求小䵂，三之，十而一。臣淳风等谨按：小䵂之率十三半，宜以母二通之，以乘本麦之数。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得三，所有之率得十也。

今有麦一斗，欲为大䵂。问：得几何？

答曰：为大䵂一斗二升。

术曰：以麦求大䵂，六之，五而一。臣淳风等谨按：大䵂之率五十有四，合以麦数乘此率。术欲从省，

先以等数九约之，所求之率得六，所有之率得五也。

[注释]

[1] 粟：古代泛指谷类，又指谷子。下文粟率指后者之率。粟米：泛指谷类，粮食。李籍《音义》云：“粟者，禾之未舂。米者，谷实之无壳。”粟米是“九数”之二，明之后常称作“粟布”。　[2] 此谓为了处理以物品作抵押及交易的问题。质：评量，后引申为称，衡量。变易：交易，交换。　[3] 粟米之法：粟米互换的标准，即各种粟米的率。法：标准、率。　[4] 大通：广泛相通。特：特地。　[5] 粝：李籍《音义》云：“粗也。”粝米：糙米，有时省称为米。粺米：精米。李籍云：“精于粝也。”糳米：舂过的精米。李籍云：“精于粺也。”糳：本义是舂。糳米：舂过的米。御米：供宫廷食用的米。李籍云：“精于糳也。供王膳之米也。蔡邕《独断》曰：‘所进曰御。御者，进也。凡衣服加于身，饮食入于口，皆曰御。’”䵂（zhí）：麦屑。李籍云：“细曰小䵂。粗曰大䵂。”大䵂：粗麦屑。菽：大豆。又，豆类的总称。荅：小豆。麻：古代指大麻，亦指芝麻。此指芝麻。豉（chǐ）：又音 shì，用煮熟的大豆发酵后制成的食品。李籍云：“盐豉也。《广雅》云‘苦李作豉’。”飧（sūn）：熟食，夕食。李籍引《说文》曰：“餔也。”糵（niè）：杣糵。李籍引《说文》曰：“米芽。”　[6]“此都术也”五句：是说这是一种普遍方法。凡是用九数作为篇名的问题，都可以对之广泛地施用率。这就是所谓告诉了过去的就能推知未来的，举出一个角，就能推论到其他三个角。都术，总术，普遍方法。诸，之于的合音。告往知来，语出《论语·学而》。举一反三，语出《论语·述而》。　[7]“诚能分诡数之纷杂”七句：是说如果能分辨各种不同的数的错综复杂，疏通它们彼此之间的闭塞之处，根据不同的物品构成各自的率，仔细地研究辨别它们的地位与关系，使偏颇的

持平，参差不齐的相齐，那么就没有不归结到这一术的。诚，如果，假如。诡，差别，不同。否（pǐ），闭塞。否塞：阻隔不通。名分，地位，身份，也泛指物品的所属关系或地位。偏颇，不公正。“平其偏颇，齐其参差”，即“齐同”运算。　[8] 设所有数为 A，所有率为 a，所求率为 b，则所求数 $B=A\div ba$。　[9]“少者多之始”十七句：是说少是多的开始，1 是数的起源。所以建立率必须使它们等于 1。根据粟率是 5，粝米率是 3，这是说粟 5 成为 1，粝米 3 成为 1。如果想把粟化成粝米，那么粟应当本身先变成 1。变成 1，是说用 5 约之，使 5 变为 1。之后再以 3 乘之，使 1 变为 3。像这样，那么率就达到了 1，把粟 5 变成了粝米 3。　[10]“然先除后乘”三句：是说如果先做除法，后做乘法，有时会剩余分数，所以此术将运算程序反过来。余分，剩余的分数。　[11]“又完言之知”十句：是说如果以整数表示之，5 升粟变成 3 升粝米；以分数表示之，1 斗粟变成 $\frac{3}{5}$ 斗粝米，以 5 作为分母，3 作为分子。如果用粟求粝米，就用分子乘，用它的分母回报以除。那么，所求率永远作为分母。完，整数。　[12] 李淳风等所见到的刘徽注已有脱错。　[13] 三之，五而一：与下文“以粟求稻”问“六之，五而一”，“以粟求飧”问“九之，五而一”，“以粝米求粟”问“五之，三而一”，“以稻求粟”问“五之，六而一”凡 5 处，因为有关的粟米之法都是 10 的倍数，故通过退位约简，得相与之率入算，而不必用 10 除，反映了十进位值制记数法的优越性。“三之，五而一”即乘以 3，除以 5。这是今有术在以粟求米问题中的应用。余类此。　[14] 十二之，二十五而一：与下文“以粟求大䵂”问“二十七之，二十五而一”，“以粟求粺饭”问“二十七之，二十五而一”，“以粟求糳饭”问“二十四之，二十五而一”，“以粟求御饭”问“二十一之，二十五而一”凡 5 处，都是将有关的粟米之法以等数 2 约简，得相与之率，再入算。　[15] 二十七之，

百而一：与下文“以粟求熟菽”问“二百七之，百而一”凡 2 处，因有关的粟米之法中有$\frac{1}{2}$，故以 2 通之，化为整数，以相与之率入算。 [16] 此处粟 50、粝饭 75，以等数 25 约简，得 2、3 为相与之率。 [17] 少半：即$\frac{1}{3}$。 [18] 太半：即$\frac{2}{3}$。 [19] 粟 50，菽、荅、麻、麦 45，以等数 5 约简，得 10、9 为相与之率。 [20] 粟 50、糵 175，以等数 25 约简，得 2、7 为相与之率。 [21] 准：依照，按照。 [22] 准：仿效，效法。 [23] 此处亦将糳米率 24 与粟率 50 以等数 2 约简，得相与之率入算。 [24] 粝米 30、粺米 27，以等数 3 约简，得 10、9 为相与之率。 [25] 五之，二而一：与下文“以粝饭求䴹”问“六之，五而一”凡 2 处，将有关的粟米之法以等数 15 约简，得相与之率入算。 [26] 二十三之，十而一：与下文“以麦求小䴹”问“三之，十而一”凡 2 处，有关的粟米之法中有$\frac{1}{2}$，故以 2 通之。所得的结果又有等数 9，故以 9 约简，为相与之率入算。 [27]《九章算术》将菽率 45，熟菽率 $103\frac{1}{2}$ 化成 10 与 23，以相与之率入算，十分简省。唐中叶之后的乘除捷算法就是沿着这一方向发展的。李淳风等将其化成 5 与 $11\frac{1}{2}$ 入算，反不如《九章算术》简省。 [28] 七之，五而一：与下文“以麦求大䴹”问“六之，五而一”凡 2 处，将有关的粟米之法以等数 9 约简，得相与之率。

[点评]

今有术，即今之三率法或称三项法（rule of three）。一般认为，此法源于印度。但印度婆罗门笈多才通晓此法（628）。比《九章算术》晚出八九百年以上。刘徽把它称作“都术”，认为对“九数”中的问题，如果能分辨

各种不同数量的错综复杂关系，疏通其窒碍之处，根据不同物品构成各自的率，对其施用齐同术，就没有不归结到此术的。事实上，刘徽将《九章算术》大部分术文和 200 余道问题归结到今有术。

今有出钱一百六十，买瓴甓十八枚[1]。瓴甓，砖也。问：枚几何？

答曰：一枚，八钱九分钱之八。

今有出钱一万三千五百，买竹二千三百五十个。问：个几何？

答曰：一个，五钱四十七分钱之三十五。

经率臣淳风等谨按：今有之义，以所求率乘所有数，合以瓴甓一枚乘钱一百六十为实。但以一乘不长[2]，故不复乘，是以径将所买之率与所出之钱为法、实也。此又按：今有之义，出钱为所有数，一枚为所求率，所买为所有率，而今有之，即得所求数。一乘不长，故不复乘。是以径将所买之率为法，以所出之钱为实。故实如法得一枚钱。不尽者，等数而命分。术曰[3]：以所买率为法，所出钱数为实，实如法得一钱。

此“经率术”是整数除法。

今有出钱五千七百八十五，买漆一斛六斗七升太半升[4]。欲斗率之[5]，问：斗几何？

答曰：一斗，三百四十五钱五百三分钱之一十五。

今有出钱七百二十，买缣一匹二丈一尺[6]。欲丈率之，问：丈几何？

答曰：一丈，一百一十八钱六十一分钱之二。

今有出钱二千三百七十，买布九匹二丈七尺。欲匹率之，问：匹几何？

答曰：一匹，二百四十四钱一百二十九分钱之一百二十四。

今有出钱一万三千六百七十，买丝一石二钧一十七斤[7]。欲石率之，问：石几何？

答曰：一石，八千三百二十六钱一百九十七分钱之百七十八。

此“经率术”是分数除法，故刘徽说“此术犹经分”。

经率此术犹经分。臣淳风等谨按[8]：今有之义，钱为所求率，物为所有数，故以乘钱，又以分母乘之为实。实如法而一。有分者通之。所买通分内子为所有率，故以为法。得钱数。不尽而命分者，因法为母，实余为子。实见不满，故以命之。术曰[9]：以所求率乘钱数为实，以所买率为法，实如法得一。

[注释]

[1] 瓴甓（língpì）：长方砖，所以刘徽说“砖也”，又称瓴甋（dì）。　[2] 一乘不长：以 1 乘任何数，不改变其值。长（zhǎng）：增长、进益。　[3] 设所出钱、所买率、单价分别为 A，a，B，则 $B=A\div a$。《九章算术》有两条“经率术”。此条是整数除法法则。　[4] 斛：容积、体积单位。1 斛为 10 斗。一斛六斗七升太半升：$16斗7\frac{2}{3}升=16\frac{23}{30}斗=\frac{503}{30}斗$。　[5] 斗率之：求以斗为单位的价钱。下“丈率之”“匹率之”“石率之”“斤率之”“钧率之”“两率之”“铢率之”同。　[6] 缣：双丝织成的细绢。匹：布帛长度单位，1 匹为 4 丈。一匹二丈一尺即 $6\frac{1}{10}$ 丈。　[7] 石：重量单位，1 石为 120 斤。钧：重量单位，1 钧为 30 斤。一石二钧一十七斤即 $197斤=\frac{197}{120}石$。　[8] 此条李注，南宋本、大典本必有舛误，诸家校勘均不合理。　[9] 此条经率术是除数为分数的除法，与经分术相同。此处出钱数为所有数，所买率就是所有率，斗（丈、匹、石）率之为所求率，则归结为今有术。

[点评]

粟米章有两条“经率术”，第一条是整数除法，第二条是分数除法。

今有出钱五百七十六，买竹七十八个。欲其大小率之[1]，问：各几何？

答曰：其四十八个，个七钱；

其三十个，个八钱。

其率术本来是不定问题，可是从答案看，规定价钱差 1，即注释[8]中的 $a-b=1$，从而变成了定解问题。

今有出钱一千一百二十，买丝一石二钧十八斤。

欲其贵贱斤率之[2]，问：各几何？

答曰：其二钧八斤，斤五钱；

其一石一十斤，斤六钱。

今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢[3]。欲其贵贱石率之，问：各几何？

答曰：其一钧九两一十二铢，石八千五十一钱；

其一石一钧二十七斤九两一十七铢，石八千五十二钱。

今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱钧率之，问：各几何？

答曰：其七斤一十两九铢，钧二千一十二钱；

其一石二钧二十斤八两二十铢，钧二千一十三钱。

今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱斤率之，问：各几何？

答曰：其一石二钧七斤十两四铢，斤六十七钱；

其二十斤九两一铢，斤六十八钱。

今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱两率之，问：各几何？

荅曰：其一石一钧一十七斤一十四两一铢，两四钱；

其一钧一十斤五两四铢，两五钱。

其率"其率"知[4]，欲令无分。按[5]："出钱五百七十六，买竹七十八个"，以除钱，得七，实余三十，是为三十个复可增一钱。然则实余之数则是贵者之数。故曰"实贵"也。本以七十八个为法[6]，今以贵者减之，则其余悉是贱者之数。故曰"法贱"也。"其求石、钧、斤、两[7]，以积铢各除法、实，各得其积数，余各为铢"知，谓石、钧、斤、两积铢除实，以石、钧、斤、两积铢除法，余各为铢，即合所问。术曰[8]：各置所买石、钧、斤、两以为法，以所率乘钱数为实，实如法而一。不满法者[9]，反以实减法，法贱实贵。其求石、钧、斤、两，以积铢各除法、实，各得其积数，余各为铢。

[注释]

[1] 大小率之：按大小两种价格计算，此问实际上是按"大小个率之"。　[2] 贵贱斤率之：以斤为单位，求物价，而贵贱差 1 钱。

下“贵贱石（钧、斤、两）率之”同。 [3] 自此以下 5 道题目的题设完全相同，只是设问依次为石、钧、斤、两、铢“率之”，成为不同的题目。前 4 题钱多物少，用“其率术”求解，而“铢率之”者，将所买丝化成以铢为单位，物多钱少，用“反其率术”求解。两：重量单位，1 斤为 16 两。铢：重量单位，1 两为 24 铢。《孙子算经》曰：“称之所起，起于黍。十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。”李籍《音义》云：“八铢为锱，二十四铢为两。” [4] 其率：揣度它们的率。其：表示揣度。无分：没有分数，即要求整数解。 [5]“按”九句：是说出钱 576，买 78 个竹，每个 7 钱，实剩余 30 钱。此 30 个每个增加 1 钱，为 8 钱。那么剩余的 30，就是贵的个数。此即实中的余数就是贵者的数量，故称为“实贵”。 [6]“本以七十八个为法”四句：是说 78 本来是法，以贵者 30 减之，剩余 48，就是贱者个数，每个 7 钱，故称为“法贱”。 [7]“其求石、钧、斤、两”八句：是说如果求石、钧、斤、两，就用它们的积铢数分别除剩余的法和实，依次得到石、钧、斤、两的数，余下是铢数，合问。 [8] 其率术是：布置所买的石、钧、斤、两作为法，以所要计价的单位乘钱数作为实，实除以法。设钱数为 A，共买物 B，$A>B$，如果贵物单价 a，买物 m，贱物单价 b，买物 n，实际上还有贵贱差 1 的条件，则其率术是求满足 $\begin{cases} m+n=B \\ ma+nb=A \\ a-b=1 \end{cases}$ 的正整数解 m,n,a,b。那么 $A \div B = b + \frac{m}{B}$。 [9]“不满法者”七句，是说有不满法的余实，就反过来用剩余的实减法，剩余的法是贱的数量，剩余的实是贵的数量。亦即令 $a=b+1$，$n=B-m$，则 m，n 分别是贵的和贱的数量，a，b 分别就是贵的价钱和贱的价钱。

今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱铢率之，问：各几何？

答曰：其一钧二十斤六两十一铢，五铢一钱；

其一石一钧七斤一十二两一十八铢，六铢一钱。

今有出钱六百二十，买羽二千一百䙨[1]。䙨，羽本也。数羽称其本，犹数草木称其根株。欲其贵贱率之，问：各几何？

答曰：其一千一百四十䙨，三䙨一钱；

其九百六十䙨，四䙨一钱。

今有出钱九百八十，买矢簳五千八百二十枚[2]。欲其贵贱率之，问：各几何？

答曰：其三百枚，五枚一钱；

其五千五百二十枚，六枚一钱。

反其率臣淳风等谨按："其率"者[3]，钱多物少；"反其率"知，钱少物多。多少相反，故曰反其率也。其率者[4]，以物数为法，钱数为实；反之知，以钱数为法，物数为实。不满法知，实余也。当以余物化为钱矣。法为凡钱，而今以化钱减之，故以实减法。"法少"知[5]，

反其率术本来也是不定问题，可是从答案看，规定要求1钱所买物的个数差1，从而变成了定解问题。

经分之所得，故曰“法少”；“实多”者，余分之所益，故曰“实多”。乘实宜以多，乘法宜以少，故曰“各以其所得多少之数乘法、实，即物数”。“其求石、钧、斤、两，以积铢各除法、实，各得其数，余各为铢”者，谓之石、钧、斤、两积铢除实，石、钧、斤、两积铢除法，余各为铢，即合所问。术曰[6]：以钱数为法，所率为实，实如法而一。不满法者，反以实减法，法少实多。二物各以所得多少之数乘法、实，即物数。其率[7]，按：出钱六百二十，买羽二千一百𦐂。反之，当二百四十钱，一钱四𦐂；其三百八十钱，一钱三𦐂。是钱有二价，物有贵贱。故以羽乘钱，反其率也。

[注释]

[1] 羽：箭翎，装饰在箭杆的尾部，用以保持箭飞行的方向。𦐂(hóu)，羽根。　[2] 簳：李籍《音义》引作“干”，云：“干，茎也。一本作‘簳’。”李籍所说“一本”即南宋本的母本，他自己所用的抄本作“干”。　[3]“‘其率’者”六句：是说其率术是出钱数量大，而买物品数量小；反其率术是出钱数量小，而买物品数量大；大与小的情况正好相反，所以叫作反其率术。　[4]“其率者”十二句：是说其率术是以物数作为法，钱数作为实；反其率术是以钱数作为法，物数作为实。不满法的就是实的余数。应当把剩

余的物数化成钱数。法为总的钱数，而现在以化成的钱数减之，所以以实减法。　[5] 从上下文看不出为什么说“故曰‘法少’”，也看不出为什么说“故曰‘实多’”。李淳风等逻辑推理水平可见一斑。　[6] 反其率术是：以出的钱数作为法，所买物品作为实，实除以法。不满法者，反过来用剩余的实减法。剩余的法是买的少的物品的数量，剩余的实是买的多的物品的数量。分别用所得到的买的多少二种物品数乘剩余的实与法，就得到贱与贵的物品的数量。亦即若 $A<B$，就是求 $\begin{cases} m+n=B \\ \dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}=A \\ a-b=1 \end{cases}$ 的正整数解 m,n,a,b。反其率术要求 1 钱所买物的个数差 1。计算 $B\div A=b+\dfrac{p}{B}$，$p<A$。余实 p 是 1 钱买 $a+b=1$ 个的钱数。余法 $B-p$ 就是 1 钱买 b 个的钱数。$m=ap$ 就是 1 钱买多的东西数量，$n=b(B-p)$ 就是 1 钱买少的东西数量。　[7] 比如买羽问中，由 $2100\div 620=3\dfrac{240}{620}$，余实 240，则 240 钱中每钱可增加 1 䩦，为 1 钱 4 䩦。由法 620 钱中除去 1 钱 4 䩦的 240 钱，则余 380 钱，每钱 3 䩦。240 钱中每钱 4 䩦，那么共 $4\times 240=960$ 䩦。380 钱中每钱 3 䩦，共 $3\times 380=1140$ 䩦。这是出钱有两价，物品有贵贱。所以用 1 钱买的鸟羽数乘钱数，这就是反其率术。

［点评］

粟米章的第一部分是各种粟米按一定的率进行交换，这种物物交换应该产生在作为等价交换物的货币尚不发达的华夏文明早期，并且由此产生了今有术。后来印度和西方的三率法与此相同，刘徽把它称为“都术”，即普